

Master recherche deuxième année
Modèles, Systèmes et Intelligence
Option Imagerie Médicale

MÉMOIRE DE RECHERCHE

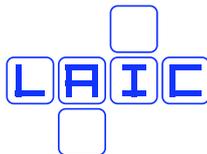
Convolutions binomiales et dérivation de fonctions discrètes bruitées

Florent Brunet

Sous la direction de Rémy Malgouyres

Soutenu le 4 juillet 2007

LAIC
IUT Clermont-Ferrand
Campus des Cézeaux
63172 AUBIÈRE CEDEX



Université Blaise Pascal
UFR Sciences Exactes et Naturelles
63177 AUBIÈRE



Abstract

We present a new convergent method to estimate derivatives of digitized functions. Based on convolution products and binomial coefficients, this approach is computable using integer only arithmetic. Even with a noisy discretization, we prove some good results about the speed of convergence. Moreover, derivatives of all order can be estimated. We also present some experimental results to extend our method to parametrized curves. To do so, we introduce a new notion of pixel-length parametrization which solves the problem of correspondance between the parametrization of a continuous curve and the indexes of the discrete associated curve pixels. Finally, some perspectives are opened for a theory of \mathbb{Z} analysis.

Résumé

Nous présentons une nouvelle approche pour estimer les dérivées de fonctions discrètes. Basée sur les produits de convolution et les coefficients binomiaux, cette méthode est calculable en nombres entiers. Nous prouvons que notre estimateur est convergent y compris sur des données bruitées. De plus, les dérivées d'ordre supérieur peuvent être calculées. Nous présentons aussi quelques résultats expérimentaux pour étendre la méthode aux courbes paramétrées. Pour cela, nous introduisons une nouvelle notion, l'abscisse *pixiligne*, qui résoud le problème de correspondance entre la paramétrisation d'une courbe continue et la numérotation des pixels de la discrétisation associée. Enfin, quelques perspectives sont ouvertes quant à la construction d'une théorie de l'analyse sur \mathbb{Z} .

Keywords

Binomial coefficients, convolution product, derivative, tangent, estimator, approximation, integer, discretization, parametrization.

Mots-clés

Coefficients binomiaux, produit de convolution, dérivée, tangente, estimateur, approximation, nombres entiers, discrétisation, paramétrisation.

Table des matières

1	Présentation du laboratoire	6
1.1	Le LAIC	6
1.2	Le travail effectué	7
1.3	Une initiation à la recherche	7
2	Notions préliminaires	8
2.1	Produit de convolution	8
2.2	Coefficients binomiaux	9
2.3	Approximation de Bernstein	11
3	Estimation de dérivées pour les fonctions réelles	14
3.1	Préliminaires	14
3.1.1	Arrondi d'un nombre réel	14
3.1.2	Discrétisation d'une fonction continue	15
3.2	État de l'art	16
3.2.1	Différences finies	16
3.2.2	Scale-space	18
3.2.3	Géométrie discrète	19
3.3	Une nouvelle approche	20
3.4	Convergence de la méthode	22
3.5	Dérivées d'ordre supérieur	29
3.5.1	Extension du principe	29
3.5.2	Théorème de convergence	30
3.5.3	Preuve	31
3.6	Illustrations et expérimentations	32
3.6.1	Optimal de convergence	32
3.6.2	Étude complète de la dérivée d'une fonction	33
3.6.3	Dérivées d'ordre supérieur	37
4	Cas des fonctions à plusieurs variables	40
4.1	Notations et définitions	40
4.2	Calculs pratiques	41
4.3	Théorème de convergence	42
4.4	Utilisation de noyaux rectangulaires	43
4.5	Dérivées directionnelles	45
4.6	Dérivées d'ordre supérieur	46
4.7	Expériences	47

5	Cas des courbes paramétrées	51
5.1	Espace discret, connexité	51
5.2	Droites arithmétiques	53
5.3	Courbes paramétrées et discrétisation	54
5.4	Géométrie discrète et estimateurs de tangentes	55
5.5	Abscisse et paramétrisation pixiligne	57
5.5.1	Définition du problème	57
5.5.2	Résolution du problème	57
5.5.3	Remarque pratique	61
5.5.4	Illustration	61
5.6	Estimation de dérivées	63
5.7	Expérimentations	66
5.7.1	Vitesse de convergence	67
5.7.2	Comparaison avec la géométrie discrète	70
5.8	Extensions	73
5.8.1	Dérivées d'ordre supérieur	73
5.8.2	Rayon de courbure	73
6	Un environnement de test	76
6.1	Grands entiers	76
6.2	Calcul pratique des produits de convolutions	76
6.2.1	Autres fonctionnalités	77
7	Problèmes connexes	78
7.1	Calcul de primitives	78
7.1.1	Présentation du problème	78
7.1.2	Une première approche	78
7.1.3	Cas des fonctions à support borné	79
7.1.4	Cas des fonctions cycliques	81
7.2	Résolution d'équations différentielles	83

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Rémy Malgouyres, directeur du LAIC, pour m'avoir accueilli lors de mon stage. Je lui suis aussi reconnaissant pour son soutien et ses conseils éclairés malgré son emploi du temps chargé.

Je remercie aussi Rita Zrour, Alexandre Faure et Thibault Marzais, pour m'avoir réservé une place dans leur bureau et un accueil chaleureux.

Pour leurs contributions scientifiques, je remercie aussi, en vrac et de manière non exhaustive, Yan Gérard, Sébastien Fourey, Dimitri Dauchet, Alex Esbelin et Jacques-Olivier Lachaud.

Enfin, je tiens à souligner l'accueil et l'ambiance de travail agréable qu'ont su instaurer tous les membres du LAIC.

Introduction

L'estimation de dérivées de fonctions discrètes est un problème central dans le domaine du traitement de l'image. Outre les difficultés liées au caractère discret des données manipulées, il faut aussi être en mesure de prendre en compte un éventuel bruit provenant de la physique des processus d'acquisition. La détection de contours dans une image numérique, la reconnaissance de formes, l'ajustement de modèles déformables sont autant de problèmes nécessitant le calcul et l'estimation de dérivées.

De nombreuses approches ont déjà été étudiées pour aborder ce problème. Citons, notamment, les méthodes de différences finies, les estimateurs de tangentes de la géométrie discrète ou, encore, les techniques issues de scale-space. Bien qu'efficaces, ces procédés ont aussi leurs inconvénients. La qualité des estimations des méthodes de différences finies se révèlent bien souvent insuffisante. Les estimateurs de la géométrie discrète ne sont généralement pas adaptés aux données bruitées. Enfin, les méthodes issues de scale-space reposent sur l'hypothèse non vérifiée que les théories du domaine continu peuvent s'appliquer au domaine discret.

Nous présentons donc une nouvelle approche basée sur les produits de convolution et les coefficients binomiaux permettant d'estimer des dérivées de fonctions discrètes. Comme nous le verrons à travers ce rapport, cet estimateur introduit par Rémy Malgouyres et Sébastien Fourey possède plusieurs propriétés intéressantes. En effet, notre méthode a les avantages combinés d'être calculable en nombres entiers, de converger et d'être résistante au bruit.

Au delà de l'estimation de la dérivée première d'une fonction discrète, nous sommes aussi en mesure de fournir un estimateur pour les dérivées d'ordre supérieur. Basé sur l'approche au premier ordre, cet estimateur hérite de toutes les bonnes propriétés (convergence, calculs entiers, ...) sans pour autant ralentir significativement les calculs.

Dans le cadre de l'estimation des tangentes aux courbes paramétrées discrètes, nous introduisons une nouvelle notion, la reparamétrisation *pixiligne*, qui répond à un des problèmes majeurs posés par la nature non isotropique de \mathbb{Z}^2 . Le problème de correspondance entre la paramétrisation d'une courbe continue et la numérotation des pixels de l'objet discret lui correspondant est ainsi résolu.

Partant sur des notions liées à la dérivation dans le domaine discret, comme le calcul de primitives ou la résolution d'équations différentielles, de nouvelles perspectives s'ouvrent pour certains problèmes du domaine de l'imagerie.

De manière générale, le plan de ce rapport reprendra les thématiques exposées en introduction. Après une très brève présentation du contexte de réalisation de mon stage, je rappellerai et définirai quelques notions préliminaires indispensables à la suite de l'exposé. Nous étudierons ensuite l'estimateur de dérivées pour les fonctions réelles à une seule variable. Viendront ensuite le cas des fonctions à plusieurs variables et le cas des fonctions paramétrées. Après cela, le travail d'implémentation et de programmation sera présenté. Enfin, quelques problèmes connexes à l'estimation de dérivées dans le domaine discret termineront ce rapport.

Chapitre 1

Présentation du laboratoire

Dans le cadre du master deuxième année MSI¹, j'ai effectué mon stage de fin d'année au LAIC, un laboratoire de la place clermontoise. Voici donc une brève présentation de ce laboratoire. Ce chapitre est aussi l'occasion de parler de certains aspects liés au travail que j'ai réalisé durant mon stage.

1.1 Le LAIC

Le LAIC est le Laboratoire d'Algorithmique et Image de Clermont. Il a été fondé en 1991 par Denis Richard sous le nom de Laboratoire de Logique, d'Algorithmique et d'Informatique de Clermont (LLAIC) dont le thème principal de recherche était orienté vers l'informatique théorique (logique mathématique, complexité algorithmique). Suite à la nomination de Denis Richard à la tête de l'IUT Informatique de Clermont-Ferrand, Jean-Pierre Reveilles a repris la direction du laboratoire. Dès lors, les sujets abordés par le laboratoire se sont davantage orientés sur des problèmes liés à l'image. Enfin, Rémy Malgouyres a pris la direction du laboratoire en 2006.

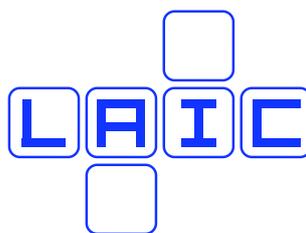


Fig. 1.1: LAIC, le laboratoire géométrique.

Le LAIC regroupe actuellement 15 permanents (4 professeurs et 11 maîtres de conférence) et 7 doctorants, dont l'activité est principalement centrée sur deux axes de recherche : l'algorithmique et l'imagerie.

Algorithmique L'équipe d'algorithmique du LAIC s'intéresse à l'étude de problèmes liés à la complexité et à la logique mathématique. Cette équipe travaille aussi sur des sujets plus proches des applications tels que la fusion de données ou la formalisation des méthodes sémantiques en base de données (en collaboration avec le LIMOS).

¹Modèles, Systèmes et Intelligence

Imagerie Cet axe de recherche se fonde sur une étude relativement théorique de la géométrie discrète aboutissant au développement d'applications d'analyse et de synthèse d'images numériques. L'objectif de la géométrie discrète est de donner un équivalent à la géométrie euclidienne dans le cadre des espaces discrets. Sur les bases de la géométrie discrète, l'équipe imagerie s'attache, entre autre, à concevoir et mettre en œuvre des méthodes pour l'illumination de scènes 3D modélisées en voxels. D'autres sujets sont abordés comme, par exemple, la reconstruction de surfaces à partir de nuages de points.

Le sujet de mon stage s'inscrit dans la thématique imagerie du LAIC dans la mesure où il s'agit de donner une définition de la dérivation (et des problèmes connexes) pour les espaces discrets.

1.2 Le travail effectué

Lors de mon arrivée au LAIC, le principe de l'estimateur de dérivées avait déjà été donné. Rémy Malgouyres et Sébastien Fourey avaient préparé une première ébauche d'un article jetant les bases de cet estimateur. La majeure partie de mon travail a consisté à étendre et corriger cet article. Nous verrons, dans la suite de ce rapport, qu'il est question de noyaux qui peuvent avoir une certaine taille. À mon arrivée, les démonstrations ne prenaient en compte que des noyaux de taille paire. Il a donc fallu étendre le principe aux noyaux de taille quelconque. De plus, cet ébauche d'article comportait de nombreuses erreurs et im-
précisions qui ont dûes être corrigées. Une autre partie de mon travail a été de mener des expérimentations pour mettre en pratique les principes théoriques de l'estimateur de dérivées. Une réflexion a aussi été menée sur les problèmes concernant le calcul de primitives et la résolution d'équations différentielles. Face à leurs difficultés intrinsèques, ces deux problèmes ne seront réellement approfondis que lors de la réalisation d'une thèse.

1.3 Une initiation à la recherche

Outre le travail scientifique réalisé (qui est l'objet du reste de ce rapport), ce stage a aussi été l'occasion de s'initier au « monde de la recherche ». J'ai ainsi eu l'occasion d'assister à une douzaine de séminaires (principalement organisés par le LAIC mais aussi par le LASMEA et le LIMOS) sur des sujets liés à la thématique imagerie de mon laboratoire d'accueil.

J'ai aussi pu élargir mes connaissances dans le domaine de la géométrie discrète en participant à une réunion du GDT GD (Groupe De Travail Géométrie Discrète).

Ce stage a aussi été l'occasion de découvrir le processus de publication d'un article. En effet, j'ai collaboré à l'amélioration et à l'extension d'un article introduisant notre estimateur de dérivées pour fonctions discrètes bruitées. Nous comptons soumettre cet article au cours du mois de septembre prochain.

Enfin, j'ai participé aux Journées Informatique et Géométrie de Sophia Antipolis le 14 et 15 juin 2007. À cette occasion, j'ai pu m'initier à un autre aspect du travail de chercheur : j'ai réalisé un exposé pour présenter les travaux réalisés lors de mon stage. J'ai ainsi eu la possibilité de bénéficier de discussions avec d'autres participants d'horizons divers apportant leurs savoir-faire et leurs points de vue différents.

Chapitre 2

Notions préliminaires

Ce chapitre présente les notions indispensables et fondamentales pour la suite du rapport. En effet, la construction de notre estimateur de dérivées discrètes utilise largement les définitions et les propriétés de cette partie.

2.1 Produit de convolution

Définition 2.1.1 (Module)

Commençons par donner la définition d'un module. Un A -module \mathcal{M} est une structure algébrique qui généralise celle du B -espace vectoriel. Le A -module est moins contraint que le B -espace vectoriel dans la mesure où A n'a pas besoin d'être un corps alors que B doit l'être. En d'autres termes, on peut utiliser pour A un ensemble sur lequel la relation de division n'est pas définie comme c'est le cas, par exemple, pour \mathbb{N} .

Notation 2.1.1

On note $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{Z} à valeur dans le module \mathcal{M} .

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \{F \mid F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{M}\} \quad (2.1)$$

Définition 2.1.2 (Produit de convolution discret)

Soient F et G deux fonctions de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Supposons que G a un support fini c'est à dire que $G(a) = 0$ pour tout a en dehors d'un sous-ensemble borné de \mathbb{Z} . On définit le produit de convolution $F * G$ par :

$$\begin{aligned} F * G : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ a &\longmapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} F(a - i) * G(i) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.1

Lorsque $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$ alors le produit de convolution est une opération associative et commutative de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$.

Définition 2.1.3 (Opérateur de convolution)

Soit H et F deux fonctions de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. On définit l'opérateur de convolution Ψ_H par :

$$\begin{aligned} \Psi_H F : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ a &\longmapsto F * H(a) \end{aligned} \quad (2.3)$$

H est appelé noyau de convolution (pour ne pas allourdir le texte, on parlera tout simplement de « noyau »). Cet opérateur permet de construire une nouvelle fonction $(\Psi_H F)$ comme la convolution d'une fonction originale (F) avec un noyau (H) .

Propriété 2.1.1

Soient H et H' deux noyaux à support fini. Alors :

$$\Psi_H \circ \Psi_{H'} = \Psi_{H*H'} \tag{2.4}$$

Preuve

$$\Psi_H \circ \Psi_{H'}(F) = \Psi_H(H' * F) = H * H' * F = \Psi_{H*H'}(F)$$

□

2.2 Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux jouent un rôle très important dans la construction de notre estimateur de dérivée. Voyons donc quelques définitions et propriétés qui leurs sont associés.

Définition 2.2.1 (Coefficient binomial)

Soient $n, p \in \mathbb{Z}$ deux entiers relatifs. Les coefficients binomiaux, notés C_n^p ou $\binom{n}{p}$, sont définis de la manière suivante :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!p!} & \text{si } p \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.5}$$

Définition 2.2.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *coefficient binomial d'ordre n* tout coefficient binomial de la forme $\binom{n}{p}$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

Propriété 2.2.1

Soient n et p deux entiers relatifs.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Preuve

On démontre propriété 2.2.1 par récurrence. □

Remarque 2.2.1 (Triangle de Pascal)

La propriété 2.2.1 est à la base du fameux triangle de Pascal, représenté à la figure 2.1.

Corollaire 2.2.1 (Calcul des coefficients binomiaux)

L'utilisation de la définition 2.2.1 pour le calcul des coefficients binomiaux n'est pas très efficace. En effet, cette formule requiert l'utilisation de très nombreuses multiplications avec, qui plus est, des nombres très grands. La propriété 2.2.1 permet d'optimiser ce calcul comme le montre l'algorithme 2.2.1.

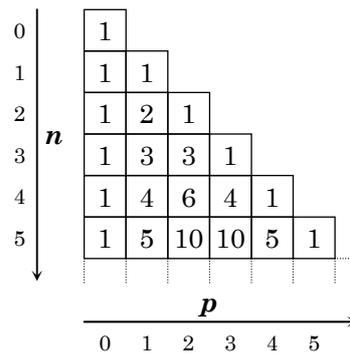


Fig. 2.1: Le triangle de Pascal

Algorithme 2.2.1 : Calcul des coefficients binomiaux

Entrées : n un entier naturel

Sorties : Un tableau C tel que $C[p] = \binom{n}{p}$ pour $p \in \{0, \dots, n\}$

```

1 début
2    $C[1..n] \leftarrow 0$ 
3    $C[0] \leftarrow 1$ 
4   pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5      $j \leftarrow i$ 
6     tant que  $j \geq 1$  faire
7        $C[j] \leftarrow C[j] + C[j-1]$ 
8        $j \leftarrow j-1$ 
9   retourner  $C$ 
10 fin

```

Propriété 2.2.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

Preuve

On démontre la propriété 2.2.2 par récurrence. \mathcal{H}_n : « $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ ».

\mathcal{H}_0 est vraie puisque $\sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} = \binom{0}{0} = 1$ et que $2^0 = 1$.

Supposons que \mathcal{H}_n soit vraie. Qu'en est-il de \mathcal{H}_{n+1} ?

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) && \text{par la propriété 2.2.1} \\
 &= \sum_{j=-1}^n \binom{n}{j} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} \\
 &= 2 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\
 &= 2 \times 2^n && \text{par } \mathcal{H}_n \\
 &= 2^{n+1}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, comme \mathcal{H}_0 est vraie et puisque $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$, alors \mathcal{H}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. \square

2.3 Approximation de Bernstein

Les approximations de Bernstein ne sont pas directement utilisées dans la construction de l'estimateur de dérivées en soi. Toutefois, elles sont à la base des démonstrations sur la convergence de l'estimateur.

Définition 2.3.1 (Polynômes de Bernstein)

Soit n un entier naturel et soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Les polynômes de Bernstein sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 p_{n,i} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Propriété 2.3.1

La famille de polynômes $\{p_{n,i}\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$ ([14]). Un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ peut donc être exprimé comme unique combinaison linéaire des vecteurs de base $p_{n,i}$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$.

Définition 2.3.2 (Approximation de Bernstein)

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. L'approximation de Bernstein de f , notée $\mathbf{B}_n f$, est définie par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_n f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) p_{n,i}(x)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

En d'autres termes, $\mathbf{B}_n f$ est la courbe de Bézier contrôlée par les points $(f(\frac{i}{n}))_{i \in \{0, \dots, n\}}$. Notons aussi que l'approximation $\mathbf{B}_n f$ est un polynôme de degrés n .

Notation 2.3.1

On note $\mathbf{B}'_n f$ la dérivée première du polynôme $\mathbf{B}_n f$ et, plus généralement, $\mathbf{B}_n^{(k)} f$ sa dérivée k -ième.

Proposition 2.3.1

La dérivée de $\mathbf{B}_n f$ est le polynôme :

$$\mathbf{B}'_n f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) p'_{n,i}(x) \quad (2.8)$$

et, plus généralement, la dérivée k -ième est :

$$\mathbf{B}_n^{(k)} f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) p_{n,i}^{(k)}(x) \quad (2.9)$$

Preuve

La proposition 2.3.1 est obtenue en appliquant les règles de dérivation des polynômes sur la formule 2.7. \square

Propriété 2.3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, la dérivée première des polynômes de Bernstein est donnée par :

$$p'_{n,i}(x) = n(p_{n-1,i-1}(x) - p_{n-1,i}(x)) \quad (2.10)$$

Preuve

$$\begin{aligned} p'_{n,i}(x) &= \left(\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right)' \\ &= \binom{n}{i} (ix^{i-1}(1-x)^{n-i} + (i-n)(1-x)^{n-i-1}x^i) \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} ix^{i-1}(1-x)^{n-i} + \frac{n!}{i!(n-i)!} (i-n)(1-x)^{n-i-1}x^i \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i(1-x)^{n-i-1} \\ &= n \left(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} x^i(1-x)^{n-i-1} \right) \\ &= n(p_{n-1,i-1}(x) - p_{n-1,i}(x)) \end{aligned}$$

\square

Notation 2.3.2

En considérant la suite (f_n) de terme général $f_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$, le polynôme $\mathbf{B}_n f$ peut aussi être écrit ainsi :

$$\mathbf{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^n f_i p_{n,i}(x) \quad x \in [0, 1] \quad (2.11)$$

De la même manière, les dérivées s'écrivent :

$$\mathbf{B}_n^{(k)} f(x) = \sum_{i=0}^n f_i p_{n,i}^{(k)}(x) \quad (2.12)$$

Théorème 2.3.1

Lorentz a démontré dans [13] que si $f \in C^k([0, 1])$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{B}_n^{(k)} f = f^{(k)} \quad \text{uniformément sur } [0, 1] \quad (2.13)$$

Toutefois, remarquons que ce théorème ne dit rien quant à la vitesse de convergence de l'approximation polynômiale par rapport à la fonction d'origine.

Théorème 2.3.2 (Chapitre 10 de [8])

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 sur $[0, 1]$.

$$|\mathbf{B}_n f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} x(1-x) \|f''\|_\infty \quad (2.14)$$

Contrairement au théorème 2.3.1 et moyennant une hypothèse de régularité plus forte, ce théorème explicite la vitesse de convergence entre l'approximation de Bernstein de f et la fonction f elle-même.

Théorème 2.3.3 (« Théorème de Floater » [9])

Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier positif quelconque et soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $C^{(k+2)}$ sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \left| (\mathbf{B}_n f)^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right| \leq \frac{1}{2n} & \left(k(k-1) \|f^{(k)}\|_\infty \right. \\ & + k |1-2x| \|f^{(k+1)}\|_\infty \\ & \left. + x(1-x) \|f^{(k+2)}\|_\infty \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le théorème de Floater donne une majoration de l'erreur commise entre la dérivée k -ième de l'approximation de Bernstein de f et la dérivée k -ième de la fonction f elle-même. Remarquons que pour $k = 0$, on retrouve bien le résultat du théorème 2.3.2.

Chapitre 3

Estimation de dérivées pour les fonctions réelles

On s'intéresse d'abord à la construction d'un estimateur de dérivées pour les fonctions réelles. Il s'agit du cas le plus « simple » à partir duquel seront construits les estimateurs pour des fonctions plus complexes (fonctions à plusieurs variables et fonctions paramétrées).

Par fonctions réelles, nous entendons les fonctions dont les ensembles source et destination sont de dimension 1. Ainsi, les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sont toutes deux considérées comme fonctions réelles. Bien qu'un peu abusive, cette dénomination permet de clairement distinguer les fonctions de \mathbb{K} dans \mathbb{K} des autres types de fonctions plus complexes sans, pour autant, entrer en collision avec les termes de « fonctions continues », « fonctions simples », ...

Nous utilisons aussi le terme de « fonction réelle discrète » ou, plus simplement, de « fonction discrète ». Cette appellation caractérise l'ensemble source de la fonction. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est qualifiée de discrète si la cardinalité de tout sous-ensemble borné $J \subset I$ est finie.

Avant d'étudier en détail le problème de l'estimation de dérivées des fonctions discrètes, examinons ce qu'est la discrétisation d'une fonction et comment elle peut être obtenue.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Arrondi d'un nombre réel

Malgré sa simplicité, la notion d'arrondi, fondamentale pour introduire les concepts de fonctions discrètes et de discrétisation, nécessite de fixer clairement et sans ambiguïté les notations et conventions utilisées.

Définition 3.1.1 (Partie entière, partie entière supérieure, partie fractionnaire)

Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in [0, 1[$ les nombres tels que :

$$x = a + b \tag{3.1}$$

L'entier relatif a est la *partie entière* de x ; elle est notée $\lfloor x \rfloor$. Le nombre b est la *partie fractionnaire* de x .

La *partie entière supérieure* de x , notée $\lceil x \rceil$, est l'entier relatif défini par :

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x \neq \lfloor x \rfloor \\ x & \text{si } x = \lfloor x \rfloor \end{cases} \tag{3.2}$$

Propriété 3.1.1

Pout tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \quad (3.3)$$

Définition 3.1.2 (Arrondi arithmétique¹ [3])

Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On appelle *arrondi arithmétique* de x , noté $\llbracket x \rrbracket$, la quantité définie par :

$$\llbracket x \rrbracket = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2} \\ \lceil x \rceil & \text{si } x \geq 0 \text{ et } \frac{1}{2} \leq x - \lfloor x \rfloor < 1 \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } x < 0 \text{ et } 0 \leq x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{2} \\ \lceil x \rceil & \text{si } x < 0 \text{ et } \frac{1}{2} < x - \lfloor x \rfloor < 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

L'arrondi arithmétique correspond à la notion d'arrondi qui est enseignée dans les classes de primaire et de collège. Son principe est illustré par la figure 3.1.

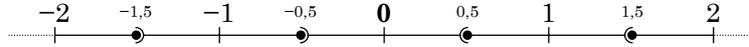


Fig. 3.1: Arrondi arithmétique

Propriété 3.1.2

Pout tout $x \in \mathbb{R}$, on a la propriété suivante :

$$|x - \llbracket x \rrbracket| \leq \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

Remarque 3.1.1

Les fonctions floor et ceil de la bibliothèque mathématique standard du C/C++ correspondent respectivement aux notions de partie entière et de partie entière supérieure de la définition 3.1.1. De même, la fonction round correspond à la définition 3.1.2 de l'arrondi arithmétique. Notons que toutes les fonctions d'arrondi que l'on peut rencontrer dans d'autres langages ou outils informatiques ne suivent pas obligatoirement cette règle. Cela est particulièrement vrai pour les nombres négatifs.

3.1.2 Discrétisation d'une fonction continue

Soit une fonction réelle $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\Gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sa discrétisation. On fixe un pas de discrétisation $h \in \mathbb{R}_+^*$ (en d'autres termes, h est la largeur d'un pixel exprimée dans le repère de la fonction ϕ). Alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$ tel que ha appartienne au domaine de définition de ϕ , les fonctions ϕ et Γ sont reliées par la relation suivante :

$$|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq \varepsilon \quad (3.6)$$

où ε est un nombre réel positif. La paramètre ε doit être choisi avec soin. En effet, si l'on prend ε trop petit, l'existence de Γ n'est pas garantie. De même, si ε est trop grand, alors l'allure de la fonction discrétisée Γ risque d'être trop éloignée de la fonction initiale ϕ .

Dans la pratique, si ϕ a pour support un intervalle borné $I = [\alpha, \beta]$ alors la discrétisation Γ de ϕ est définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma : [\alpha, \beta] &\longrightarrow \left\{ \left\lceil \frac{\alpha}{h} \right\rceil, \dots, \left\lfloor \frac{\beta}{h} \right\rfloor \right\} \\ a &\longmapsto \left\llbracket \frac{\phi(ha)}{h} \right\rrbracket \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹Souvent appelé *Symmetric Round-Half-Up Rounding* en anglais.

Propriété 3.1.3

La discrétisation Γ définie en 3.7 est unique et respecte la relation :

$$|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq \frac{h}{2} \quad (3.8)$$

Preuve

L'unicité de la fonction Γ provient du fait qu'à la fois ϕ et l'arrondi arithmétique sont deux fonctions bien définies.

Soit $a \in \left\{ \left\lceil \frac{\alpha}{h} \right\rceil, \dots, \left\lfloor \frac{\beta}{h} \right\rfloor \right\}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \left| \left\lceil \frac{\phi(ha)}{h} \right\rceil - \frac{\phi(ha)}{h} \right| &\leq \frac{1}{2} && \text{(propriété 3.1.2)} \\ \iff |h\Gamma(a) - \phi(ha)| &\leq \frac{h}{2} && \text{car } h > 0 \end{aligned}$$

□

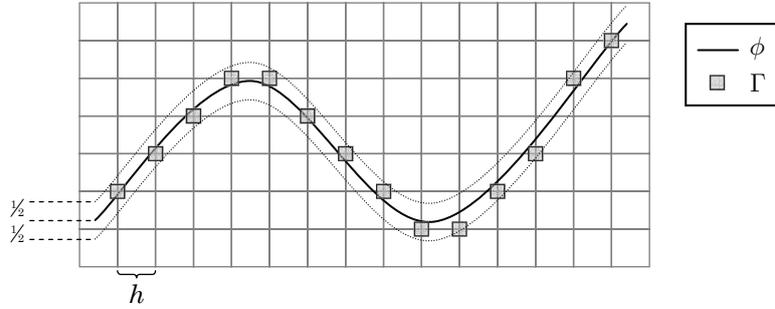


Fig. 3.2: Illustration d'une discrétisation. Notons bien qu'ici ce ne sont pas les points $(a, \Gamma(a))$ qui ont été représentés mais les points $(ha, h\Gamma(a))$.

Prendre le paramètre ε égal à $\frac{h}{2}$ donne une discrétisation optimale de la fonction réelle. Toutefois, si l'on veut prendre en compte une éventuelle imprécision dans la discrétisation (par exemple si la fonction discrète est bruitée), il est possible de prendre un ε supérieur à $\frac{h}{2}$. Dans la suite, une fonction réelle ϕ et sa discrétisation Γ seront mises en relation avec la formule suivante :

$$|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq Kh^\alpha \quad (3.9)$$

où $K \in \mathbb{R}_+^*$ et $0 < \alpha \leq 1$. L'équation 3.9 autorise la fonction discrète Γ à être entâchée d'un certain bruit (uniformément majoré). Ce bruit est modélisé par le paramètre α . Puisque h a pour vocation d'être petit (en particulier, plus petit que 1), le bruit autorisé est d'autant plus important que le paramètre α est petit.

3.2 État de l'art

Étant un problème central dans le domaine du traitement de l'image, l'estimation de dérivée des fonctions discrètes a déjà fait l'objet de nombreuses études. Nous commençons donc par voir quelques unes des méthodes existantes.

3.2.1 Différences finies

Lorsque l'on ne connaît pas l'expression analytique de la dérivée d'une fonction, les différences finies constituent une méthode pour essayer d'estimer cette dérivée. Cette approche

peut être considérée comme une simplification de la définition même de la dérivée ([10]) c'est-à-dire la valeur vers laquelle tend le coefficient directeur de la droite passant par le point de la fonction où l'on veut évaluer la dérivée et un autre point de la fonction se rapprochant du premier (illustration 3.3).

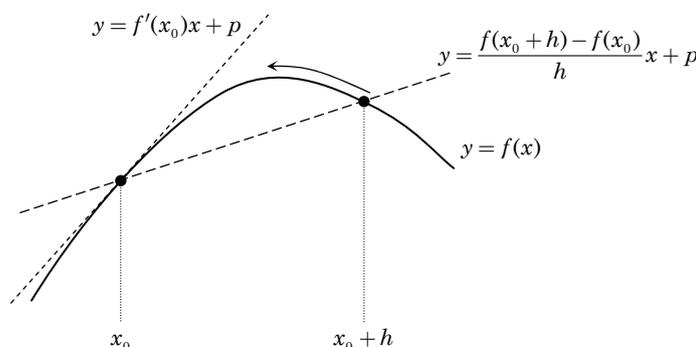


Fig. 3.3: Interprétation de la dérivée comme pente de la tangente.

On retrouve aussi les fondements théoriques de cette technique en utilisant le théorème de Taylor ([7]).

Théorème 3.2.1 (« Théorème de Taylor »)

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit f une fonction définie sur I , n fois dérivable, et soient a et x deux éléments de I . Le théorème de Taylor stipule alors que :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i + R(x) \quad (3.10)$$

où $f^{(i)}$ désigne la dérivée i -ième de f (en considérant, par convention, que $f^{(0)} = f$ et que $0! = 1$). La fonction R est appelée le reste et quantifie l'erreur entre la fonction f et son approximation polynomiale. Notons qu'il existe plusieurs formules pour exprimer ce reste R : formule de Taylor-Young, formule de Taylor-Lagrange, formule de Taylor avec reste intégral.

Pour introduire les différences finies, nous nous contentons de négliger² le reste R . Par exemple, pour $h \in \mathbb{R}_+$ donné et en remplaçant x par $x_0 + h$, a par x_0 et n par 2 dans l'équation 3.10, nous pouvons déduire une approximation de la dérivée de f en x_0 :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &\simeq f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + h - x_0) \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &\simeq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu la méthode de calcul des différences finies avant.

En exploitant la formule 3.10 de manière légèrement différente, on peut obtenir d'autres formules. Le tableau 3.1 donne les trois formules les plus courantes.

Si l'on considère le cas des fonctions discrètes (c'est à dire la cas où $h = 1$), le calcul des différences finies peut être effectué en appliquant l'opérateur de convolution discret. Pour cela, il suffit de choisir judicieusement les noyaux à utiliser. Le tableau 3.2 explicite ces noyaux.

Si les différences finies se révèlent efficaces pour des fonctions réelles elles le sont en revanche beaucoup moins pour les fonctions discrètes. En effet, avec les formules du tableau 3.1,

²Il est parfois intéressant, voire indispensable, d'étudier le comportement de ce reste pour caractériser plus finement une méthode reposant sur les différences finies mais cela n'entre pas dans le cadre de ce rapport.

Type de différences finies	Méthode de calcul
Avants	$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
Arrières	$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$
Centrales	$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$

Tab. 3.1: Types de différences finies les plus communs.

Type de différences finies	Noyau de convolution associé
Avants	$\delta_+ : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = -1 \\ -1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Arrières	$\delta_- : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ -1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Centrales	$\delta_0 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $a \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } a = -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Tab. 3.2: Correspondance entre type de différences finies et noyaux de convolution

l'estimation de la dérivée en un point est réalisé à partir d'un sous-ensemble de valeurs de la fonction très restreint. Ainsi pour une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} , la différence des valeurs entre deux points successifs n'est pas obligatoirement significative puisqu'elle peut provenir d'un bruit issu de la discrétisation.

3.2.2 Scale-space

Scale-space consiste à étudier une fonction à différentes échelles. Je présente ici de manière simpliste les concepts fondamentaux de cette méthode. Ainsi, partant d'une fonction $f : [0, 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, scale-space s'intéresse à la suite de fonctions $\{f_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ définie par :

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{i+1} = \Psi f_i \end{cases} \quad (3.11)$$

où Ψf_i est donné par (pour $f_i : [0, b] \subset [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} \Psi f_i : [0, \frac{b}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\sigma(t) f_i(2x - t) dt \end{aligned} \quad (3.12)$$

\mathcal{G}_σ est un noyau gaussien centré d'écart type σ :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

En effectuant un produit de convolution avec un noyau gaussien, scale-space tente d'éliminer le bruit. Les changements d'échelle permettent de considérer différents niveaux de détails dans la fonction, tous ne portant pas le même type d'information (par exemple, les détails les plus fins sont souvent entachés de bruits alors que les détails les plus grossier donnent des informations sur le comportement global de la fonction). La figure 3.4 donne une illustration des principes de scale-space.

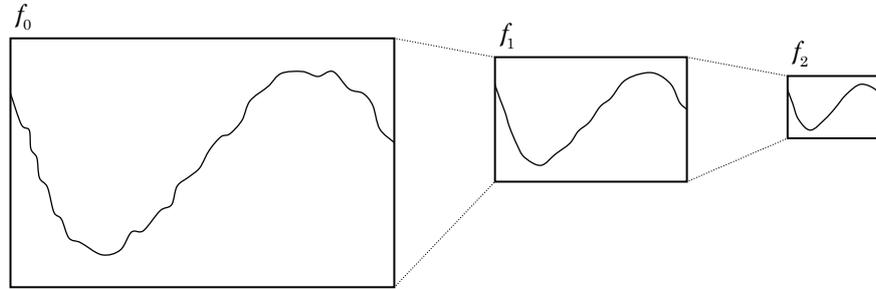


Fig. 3.4: Principe du changement d'échelle dans scale-space.

Dans la pratique, le changement d'échelle dans scale-space peut être réalisé de bien d'autres manières. Par exemple, le produit de convolution peut ne pas être réalisé avec un noyau gaussien. Il n'est pas non plus obligatoire d'avoir un facteur 2 entre les échelles successives. Il existe une littérature abondante référençant les modalités de scale-space. Citons, par exemple, [11], [12], ou [6].

L'estimation de dérivée avec scale-space est effectuée en changeant le noyau de convolution. Au lieu d'utiliser \mathcal{G}_σ , on utilise sa dérivée. De même, pour estimer la dérivée k -ième, on utilise la dérivée k -ième de \mathcal{G}_σ .

Bien qu'étant un outil très puissant, les méthodes issues de scale-space ont quelques inconvénients. Le principal défaut est que l'ensemble des définitions et résultats sont donnés dans le domaine continu. Le passage au cas discret est effectué en faisant l'hypothèse que le cas discret est similaire au cas continu. Or, aujourd'hui aucun résultat ne montre cette hypothèse de manière rigoureuse. L'autre désavantage dans l'utilisation d'une théorie continue est la possible instabilité numérique de l'implémentation des algorithmes.

3.2.3 Géométrie discrète

Dans le cadre de l'estimation de dérivée, la géométrie discrète s'attache plus à évaluer l'orientation des tangentes le long d'une courbe paramétrée discrète qu'à calculer la valeur de la dérivée en un point d'une fonction réelle discrétisée. Cependant, ces deux problèmes sont fortement connexes puisque la tangente à une courbe est déterminée à partir des dérivées de cette courbe.

Pour l'instant, je me contenterai de dire que les estimateurs de dérivées de la géométrie discrète ont l'avantage d'être calculables en nombres entiers et d'avoir des propriétés géométriques intéressantes. Cependant, ils ne peuvent pas estimer les dérivées de fonctions réelles discrètes quelconques (puisque'ils nécessitent des hypothèses de connexité plus fortes). De plus, les estimateurs existants dans ce domaine ne sont généralement pas résistants au bruit. Je reviendrai sur ces estimateurs et aux notions qui leurs sont associés quand cela sera plus approprié, à savoir lorsque nous étudierons le cas des courbes paramétrées (chapitre 5).

3.3 Une nouvelle approche

Nous proposons maintenant une nouvelle approche pour estimer la dérivée d'une fonction discrète. Comme pour scale-space, cette approche est basée sur le calcul de produits de convolution. Cependant, les algorithmes que nous proposons sont des algorithmes en nombres entiers seulement. Ainsi, les problèmes d'instabilité numérique n'ont pas lieu de se poser. De plus, notre nouvel estimateur de dérivées converge plus rapidement vers la dérivée théorique attendue que les méthodes issues des différences finies.

Comme nous l'avons déjà dit précédemment, notre estimateur de dérivées repose sur le calcul de produits de convolution. En fait, il s'agit d'appliquer l'opérateur de convolution défini en 2.1.3. Tout le problème réside en la définition des noyaux de convolution qui vont permettre d'estimer les dérivées. Nous allons donc commencer par présenter les noyaux utilisés et certaines de leurs propriétés.

Définition 3.3.1

Soit $K \in \mathcal{L}_M$ un noyau à support fini. On dit que :

- K est un *noyau moyennneur* si l'application K est paire c'est à dire si $K(-a) = K(a)$ pour tout a ;
- K est un *noyau dérivateur* si l'application K est impaire c'est à dire si $K(-a) = -K(a)$ pour tout a ;

Notation 3.3.1

Par commodité, on note δ le noyau δ_- des différences finies arrières défini dans le tableau 3.2.

Définition 3.3.2 (Noyau de régularisation)

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On définit le noyau de régularisation de taille n , noté H_n , de la manière suivante :

$$H_n: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$a \longmapsto \begin{cases} \binom{n}{a+\frac{n}{2}} & \text{si } a \text{ est pair et si } a \in \{-\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}\} \\ \binom{n}{a+\frac{n+1}{2}} & \text{si } a \text{ est impair et si } a \in \{-\frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.14)$$

Comme son nom l'indique, le noyau H_n a pour effet de régulariser la fonction sur laquelle il est appliqué. Prenons une fonction $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. La convolution de f avec H_n en un point a correspond au calcul de la moyenne³ pondérée de $n+1$ valeurs de f prises autour du point a .

Remarquons aussi que le noyau H_n correspond à la n -ième ligne centrée du triangle de Pascal comme cela est illustré à la figure 3.5 pour $n=4$.

Propriété 3.3.1

Si n est pair alors H_n est un noyau moyennneur. En revanche, si n est impair, nous avons que $H_n(a) = H_n(a-1)$. Dans ce cas le noyau n'est pas symétrique par rapport à l'axe vertical passant par 0 mais par rapport à celui passant par $-\frac{1}{2}$.

Passons maintenant à la définition du noyau le plus important dans la mesure où c'est celui-là qui va nous permettre d'estimer les dérivées.

³Quoique peu gênant sur l'exposé du principe, il manque un facteur $\frac{1}{2^n}$ pour que l'on puisse véritablement parler de moyenne. Ce facteur $\frac{1}{2^n}$ provient du fait que la somme de tous les coefficients binomiaux d'ordre n est égale à 2^n (propriété 2.2.2).

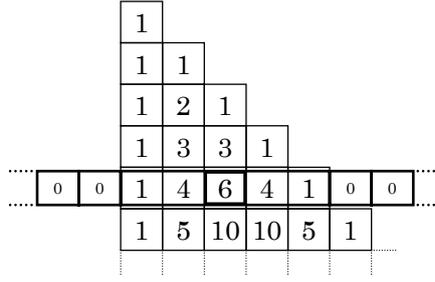


Fig. 3.5: Relation entre le noyau H_n et le triangle de Pascal.

Définition 3.3.3 (Noyau de dérivation)

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On définit le noyau de dérivation, noté D_n , comme suit :

$$D_n = \delta * H_n \tag{3.15}$$

Propriété 3.3.2

Lorsque n est impair, le noyau de dérivation D_n est impair. Cependant, si n est pair, le noyau D_n n'est pas symétrique par rapport à l'origine mais par rapport au point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$.

Propriété 3.3.3

En développant la convolution avec δ dans l'équation 3.15, on obtient l'écriture suivante pour le noyau de dérivation :

$$D_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \begin{cases} \binom{n}{a+\frac{n}{2}} - \binom{n}{a+\frac{n}{2}-1} & \text{si } a \text{ est pair} \\ & \text{et si } a \in \{-\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} + 1\} \\ \binom{n}{a+\frac{n+1}{2}} - \binom{n}{a+\frac{n+1}{2}-1} & \text{si } a \text{ est impair} \\ & \text{et si } a \in \{-\frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2} + 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.16}$$

Définition 3.3.4

Soit $\Gamma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{M}$ une fonction discrète et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel positif ou nul. L'estimation de la dérivée de Γ est la fonction discrète définie par :

$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(a) \tag{3.17}$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}$ tel que le produit de convolution soit défini.

Le noyau D_n étant composé de deux parties (H_n et δ), son action est double. Premièrement, grâce à H_n , la fonction est régularisée permettant ainsi de limiter les effets d'un éventuel bruit. Deuxièmement, il estime la dérivée puisque c'est le rôle de δ .

La présence du facteur $\frac{1}{2^n}$ dans l'équation 3.17 est expliqué par l'argument utilisé dans la note 3 relative au noyau de régularisation.

Enfin, remarquons que si Γ est à valeur dans \mathbb{Z} , l'estimation de la dérivée peut être réalisée presque uniquement en nombres entiers. Seule la multiplication par le facteur $\frac{1}{2^n}$ nécessite l'utilisation de nombres à virgule flottante. Or cette opération peut être réalisée en tant que toute dernière étape du processus d'estimation de la dérivée, ne remettant en cause ni la stabilité numérique de la méthode, ni sa rapidité d'exécution.

Corollaire 3.3.1

Étant donnée une fonction discrète $\Gamma : I \subset \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que $|I| = m$, l'algorithme d'estimation de la dérivée $\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma$ est réalisable en $\mathcal{O}(nm)$.

3.4 Convergence de la méthode

Nous avons désormais mis en place une nouvelle méthode pour estimer les dérivées de fonctions discrètes. Nous nous intéressons maintenant à la qualité de cette approche.

Théorème 3.4.1 (Théorème de convergence)

Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 telle que $\phi^{(3)}$ soit bornée.

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ le pas de discrétisation.

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\Gamma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ une discrétisation de ϕ telle que pour tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq Kh^\alpha \quad (3.18)$$

Si :

$$n = \left\lfloor h^{\frac{2(\alpha-3)}{3}} \right\rfloor \quad (3.19)$$

Alors il existe une fonction $\sigma_{\phi,\alpha} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma_{\phi,\alpha}(h) \in \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}\alpha})$ lorsque $h \longrightarrow 0$ telle que :

$$\left| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(a) - \phi'(ha) \right| \leq \sigma_{\phi,\alpha}(h) \quad (3.20)$$

Le théorème 3.4.1 est fondamental puisqu'il montre qu'à partir de la discrétisation d'une fonction continue, notre estimateur de dérivée converge vers le résultat théorique attendu, à savoir la dérivée continue de la fonction initiale, à la vitesse $h^{\frac{2}{3}\alpha}$. De plus, l'hypothèse de l'équation 3.18 indique qu'il y a aussi convergence lorsque l'on prend une discrétisation entachée d'un bruit uniformément majoré (modélisé par α).

Nous allons maintenant démontrer ce théorème. Au préalable, nous avons besoin de quelques lemmes et résultats préliminaires.

Définition 3.4.1 (Formule de Stirling ([1]))

Si $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty \quad (3.21)$$

Proposition 3.4.1

Soit $(f_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ une suite réelle telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ on ait $|f_i| \leq \varepsilon$. Alors, on a le résultat suivant :

$$\mathbf{B}'_n f \left(\frac{1}{2} \right) \leq \begin{cases} \frac{n\varepsilon}{2^{n-2}} \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}!\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right)} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n\varepsilon}{2^{n-2}} \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (3.22)$$

Preuve

$$\mathbf{B}'_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i p'_{n,i}(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= n \sum_{i=0}^n f_i (p_{i-1, n-1}(x) - p_{n-1, i}(x)) \\
 &= n \sum_{i=0}^n f_i \left(\binom{n-1}{i-1} x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \right)
 \end{aligned}$$

En prenant $x = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{B}'_n f \left(\frac{1}{2} \right)| &\leq \frac{n}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^n |f_i| \left| \binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i} \right| \\
 &\leq \frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^n \left| \binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i} \right|
 \end{aligned}$$

Si n est pair :

$$\begin{aligned}
 &\frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^n \left| \binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i} \right| \\
 &= \frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1} \right) + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \left(\binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i} \right) \right) \\
 &= \frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \left(\binom{n-1}{\frac{n}{2}-1} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-2} \binom{n-1}{i} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-1}{i-1} \right. \\
 &\quad \left. + \binom{n-1}{\frac{n}{2}} + \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^n \binom{n-1}{i-1} - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \right) \\
 &= \frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \left(2 \binom{n-1}{\frac{n}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-2} \binom{n-1}{i} - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-2} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \binom{n-1}{i} - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \right) \\
 &= \frac{n\varepsilon}{2^{n-2}} \frac{(n-1)!}{\frac{n}{2}! \left(\frac{n}{2} - 1 \right)!}
 \end{aligned}$$

Si n est impair :

$$\begin{aligned}
 &\frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^n \left| \binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i} \right| \\
 &= \frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1} \right) + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^n \left(\binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i} \right) \right) \\
 &= \frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \left(\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-1}{i} - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1}{i-1} \right. \\
 &\quad \left. + \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \binom{n-1}{i-1} - \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \binom{n-1}{i} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n\varepsilon}{2^{n-1}} \left(2\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-1}{i} - \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \binom{n-1}{i} - \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \binom{n-1}{i} \right) \\
 &= \frac{n\varepsilon}{2^{n-2}} \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2}
 \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.2

Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$s_n = \begin{cases} \frac{n}{2^{n-2}} \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}!\right)\left(\frac{n-2}{2}!\right)} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n}{2^{n-2}} \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (3.23)$$

Alors, quelle que soit la parité de n , on a que :

$$s_n \sim \frac{2\sqrt{2}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty \quad (3.24)$$

Preuve

On utilise la formule de Stirling (propriété 3.4.1) et, en considérant que n est pair, on obtient :

$$\begin{aligned}
 s_n &\sim \frac{n}{2^{n-2}} \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^n}{\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\pi(n-2)} \left(\frac{n-2}{2e}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{n-1}(n-1)^n n^{\frac{n}{2}}}{e\sqrt{\pi}\sqrt{n(n-2)}n^n(n-2)^{\frac{n-2}{2}}} \\
 &\sim \frac{2\sqrt{2}\sqrt{n-1}n^{\frac{n}{2}}}{e^2\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}(n-2)^{\frac{n-2}{2}}} \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}n^{\frac{n-1}{2}}}{e^2\sqrt{\pi}(n-2)^{\frac{n-1}{2}}}\sqrt{n-1} \\
 &\sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n-1}{2}} = e^2
 \end{aligned}$$

Si n est impair, alors on a :

$$\begin{aligned}
 s_n &\sim \frac{n}{2^{n-2}} \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\left(\sqrt{\pi(n-1)}\right)^2 \left(\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)^2} \\
 &= \frac{n\sqrt{2}}{2^{n-2}} \frac{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{n-1}} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}n}{\sqrt{\pi(n-1)}} \\
 &\sim \frac{2\sqrt{2}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}
 \end{aligned}$$

□

Lemme 3.4.1

Soit $(f_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ une suite réelle telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ on ait $|f_i| \leq \varepsilon$. D'après la proposition 3.4.1 et la définition de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la proposition 3.4.2, on a :

$$\mathbf{B}'_n f\left(\frac{1}{2}\right) \leq s_n \varepsilon \quad (3.25)$$

Proposition 3.4.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ (de parité quelconque). Alors :

$$\frac{n+1}{2^n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |D_n(a-i)| = s_{n+1} \quad (3.26)$$

Preuve

Si n est pair :

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2^n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |D_n(a-i)| \\ &= \frac{n+1}{2^n} \sum_{i=a-\frac{n}{2}-1}^{a+\frac{n}{2}} \left| \binom{n}{a-i+\frac{n}{2}} - \binom{n}{a-i+\frac{n}{2}-1} \right| \\ &= \frac{n+1}{2^n} \sum_{i=0}^{n+1} \left| \binom{n}{i-1} - \binom{n}{i} \right| \\ &= \frac{n+1}{2^n} \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \left(\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1} \right) + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} - \binom{n}{i} \right) \right) \\ &= \frac{n+1}{2^n} \left(\binom{n}{\frac{n}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{i} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{i-1} + \binom{n}{\frac{n}{2}} + \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n+1} \binom{n}{i-1} - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \binom{n}{i} \right) \\ &= \frac{n+1}{2^n} \left(2\binom{n}{\frac{n}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{i} - \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{j} + \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^n \binom{n}{j} - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \binom{n}{i} \right) \\ &= \frac{n+1}{2^{n-1}} \frac{n!}{\left(\frac{n!}{2}\right)^2} \\ &= s_{n+1} \end{aligned}$$

Si n est impair :

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2^n} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |D_n(a-i)| \\ &= \frac{n+1}{2^n} \sum_{i=0}^{n+1} \left| D_n\left(\frac{n+1}{2} - i\right) \right| \\ &= \frac{n+1}{2^n} \sum_{i=0}^{n+1} \left| \binom{n}{i-1} - \binom{n}{i} \right| \\ &= \frac{n+1}{2^n} \left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1} \right) + \sum_{i=\frac{n+1}{2}+1}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} - \binom{n}{i} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n+1}{2^n} \left(\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n}{i} - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i-1} \right. \\
 &\quad \left. + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}} + \sum_{i=\frac{n+1}{2}+2}^{n+1} \binom{n}{i-1} - \sum_{i=\frac{n+1}{2}+1}^n \binom{n}{i} \right) \\
 &= \frac{n+1}{2^n} \left(2 \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n}{i} - \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n}{j} + \sum_{j=\frac{n+1}{2}+1}^n \binom{n}{j} - \sum_{i=\frac{n+1}{2}+1}^n \binom{n}{i} \right) \\
 &= \frac{n+1}{2^{n-1}} \frac{n!}{\frac{n+1}{2}! \frac{n-1}{2}!} \\
 &= s_{n+1}
 \end{aligned}$$

□

Preuve (du théorème 3.4.1)

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et f la fonction définie de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{1}{h(n+1)} \phi \left(h(n+1)x - \frac{h(n+1)}{2} + ha \right) \quad (3.27)$$

Commençons par considérer le cas où n est pair. Puisque, par hypothèse, $|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq Kh^\alpha$ et que ϕ est C^3 (donc ϕ est continue), il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $|\phi(ha) - \phi(ha + \frac{h}{2})| \leq ch$. Par conséquent, il existe $K' \in \mathbb{R}^+$ tel que $|h\Gamma(a) - \phi(ha + \frac{h}{2})| \leq K'h^\alpha$.

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(a) - \phi'(ha) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2^n} D_n(a-i) \Gamma(i) - \phi'(ha) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{1}{h(n+1)} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) h\Gamma(i) - \phi'(ha) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{1}{h(n+1)} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) (h\Gamma(i) + \phi(hi) - \phi(hi)) - \phi'(ha) \right| \\
 &\leq \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) \frac{1}{h(n+1)} \phi(hi) - \phi'(ha) \right| \\
 &\quad + \frac{1}{h(n+1)} \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} |D_n(a-i) \frac{n+1}{2^n} (h\Gamma(i) - \phi(hi))| \\
 &\leq \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) \frac{1}{h(n+1)} \phi(hi) - \phi'(ha) \right| \\
 &\quad + K \frac{h^\alpha}{h(n+1)} \frac{n+1}{2^n} \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} |D_n(a-i)| \\
 &\quad \text{puisque par hypothèse } |h\Gamma(i) - \phi(hi)| \leq Kh^\alpha \\
 &= \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) \frac{1}{h(n+1)} \phi(hi) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &\quad \text{par la proposition 3.4.3} \\
 &= \left| \sum_{i=-\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} D_n(-j) \frac{1}{h(n+1)} \phi(hj + ha) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \sum_{i=-\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} D_n(-j) f\left(\frac{j}{n+1} + \frac{1}{2}\right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=-\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} (-D_n(j)) f\left(\frac{j}{n+1} + \frac{1}{2}\right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=-\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} f\left(\frac{j}{n+1} + \frac{1}{2}\right) \left(\binom{j+\frac{n+1}{2}-1}{n} - \binom{j+\frac{n+1}{2}}{n} \right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1}{2^n} f\left(\frac{i}{n+1}\right) \left(\binom{i-1}{n} - \binom{i}{n} \right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=0}^{n+1} f\left(\frac{i}{n+1}\right) p'_{n+1,i}\left(\frac{1}{2}\right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \mathbf{B}'_{n+1} f\left(\frac{1}{2}\right) - f'\left(\frac{1}{2}\right) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1}
 \end{aligned}$$

De manière similaire, si n est impair :

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(a) - \phi'(ha) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2^n} D_n(a-i) \Gamma(i) - \phi'(ha) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{1}{h(n+1)} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) h \Gamma(i) - \phi'(ha) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{1}{h(n+1)} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) (h \Gamma(i) + \phi(hi) - \phi(hi)) - \phi'(ha) \right| \\
 &\leq \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) \frac{1}{h(n+1)} \phi(hi) - \phi'(ha) \right| \\
 &\quad + \frac{1}{h(n+1)} \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \left| D_n(a-i) \frac{n+1}{2^n} (h \Gamma(i) - \phi(hi)) \right| \\
 &\leq \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) \frac{1}{h(n+1)} \phi(hi) - \phi'(ha) \right| \\
 &\quad + K \frac{h^\alpha}{h(n+1)} \frac{n+1}{2^n} \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} |D_n(a-i)| \\
 &= \left| \sum_{i=a-\frac{n+1}{2}}^{a+\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} D_n(a-i) \frac{1}{h(n+1)} \phi(hi) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=-\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} D_n(-j) \frac{1}{h(n+1)} \phi(hj + ha) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=-\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} D_n(-j) f\left(\frac{j}{n+1} + \frac{1}{2}\right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=-\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} (-D_n(j)) f\left(\frac{j}{n+1} + \frac{1}{2}\right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=-\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n} f\left(\frac{j}{n+1} + \frac{1}{2}\right) \left(\binom{j+\frac{n+1}{2}-1}{n} - \binom{j+\frac{n+1}{2}}{n} \right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1}{2^n} f\left(\frac{i}{n+1}\right) \left(\binom{i-1}{n} - \binom{i}{n} \right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \sum_{i=0}^{n+1} f\left(\frac{i}{n+1}\right) p'_{n+1,i}\left(\frac{1}{2}\right) - \phi'(ha) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\
 &= \left| \mathbf{B}'_{n+1} f\left(\frac{1}{2}\right) - f'\left(\frac{1}{2}\right) \right| + K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1}
 \end{aligned}$$

Donc en utilisant le théorème 2.3.3 (avec $x = \frac{1}{2}$ et $k = 1$) on obtient :

$$\left\| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(a) - \phi'(ha) \right\| \leq \frac{1}{8(n+1)} K_3 + K_0 \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1}$$

avec $K_0 = K'$ si n est pair ou $K_0 = K$ si n est impair et $K_3 = \|f^{(3)}\|_\infty$.

Soit $S_3 = \|\phi^{(3)}\|_\infty$ la norme infinie de $\phi^{(3)}$. Exprimons S_3 en fonction de K_3 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{h(n+1)} \phi \left(h(n+1)x - \frac{h(n+1)}{2} + ha \right) \\ \Rightarrow f'(x) &= \phi' \left(h(n+1)x - \frac{h(n+1)}{2} + ha \right) \\ \Rightarrow f^{(2)}(x) &= h(n+1) \phi^{(2)} \left(h(n+1)x - \frac{h(n+1)}{2} + ha \right) \\ \Rightarrow f^{(3)}(x) &= h^2(n+1)^2 \phi^{(3)} \left(h(n+1)x - \frac{h(n+1)}{2} + ha \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= \|f^{(3)}\|_\infty \\ &= \sup_{x \in I} \left| f^{(3)}(x) \right| \\ &= \sup_{x \in I} \left| h^2(n+1)^2 \phi^{(3)} \left(h(n+1)x - \frac{h(n+1)}{2} + ha \right) \right| \\ &= h^2(n+1)^2 \sup_{y \in I} \left| \phi^{(3)}(y) \right| \\ &= h^2(n+1)^2 S_3 \end{aligned}$$

En posant $\Sigma_{\phi,\alpha}(h,n) = \frac{(n+1)h^2}{8} S_3 + K_0 \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1}$ alors on a que :

$$\left| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(a) - \phi'(ha) \right| \leq \Sigma_{\phi,\alpha}(h,n)$$

Cherchons maintenant le minimum de la fonction Σ en annulant sa dérivée partielle par rapport à h :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\phi,\alpha}(h,n) &= \frac{(n+1)h^2}{8} S_3 + K_0 \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1} \\ &\sim Ah^2n + B \frac{h^{\alpha-1}}{n} \sqrt{n} \\ \text{où } A &= \frac{S_3}{8} \text{ et } B = \frac{K_0 2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_{\phi,\alpha}}{\partial h}(h,n) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial h} \left(Ah^2n + B \frac{h^{\alpha-1}}{n} \sqrt{n} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2Ah + B(\alpha-1) \frac{h^{\alpha-2}}{n} \sqrt{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow Cn - D \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{où } C = 2Ah \text{ et } D = (1-\alpha)Bh^{\alpha-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{Cn\sqrt{n} - D}{\sqrt{n}} = 0 \\ &\Leftrightarrow n^{\frac{3}{2}} = \frac{D}{C} \quad \text{car } n > 0 \text{ et } C \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow n &= \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow n &= 4\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{K_0}{S_3}\right)^{\frac{2}{3}}h^{\frac{2(\alpha-3)}{3}} \end{aligned}$$

Finalement, en posant $n = h^{\frac{2(\alpha-3)}{3}}$, on aboutit au résultat du théorème 3.4.1 :

$$\sigma_{\phi,\alpha}(h) = \Sigma_{\phi,\alpha}\left(h, h^{\frac{2(\alpha-3)}{3}}\right) = O(h^{\frac{2}{3}\alpha})$$

□

3.5 Dérivées d'ordre supérieur

Désormais, nous avons un estimateur de dérivées convergent pour des fonctions discrètes éventuellement bruitées. On s'intéresse maintenant au calcul de dérivées d'ordre supérieur.

3.5.1 Extension du principe

On construit l'estimateur de dérivées d'ordre supérieur à partir de l'estimateur pour la dérivée première. Pour cela, on applique le principe naturel pour le calcul de ce type de dérivée. Ainsi, étant donné un entier naturel k , la dérivée k -ième d'une fonction f , notée $f^{(k)}$, est calculée en dérivant k fois la fonction f . Nous allons donc appliquer le même principe avec l'estimateur de dérivée c'est à dire que l'estimation de la dérivée k -ième de la fonction discrète $\Gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est estimée par une expression de la forme suivante :

$$\underbrace{\Psi_{D_n} \circ \dots \circ \Psi_{D_n}}_{k \text{ fois}} \Gamma \quad (3.28)$$

Cependant, appliquer directement la formule 3.28 n'est pas très judicieux. En effet, la complexité de l'algorithme résultant serait en $\mathcal{O}(knm)$ (où k est l'ordre de la dérivation, n la taille du noyau dérivateur et m le nombre de points de la fonction Γ). En exploitant les propriétés de l'opérateur de convolution, il est possible d'optimiser ce calcul.

Définition 3.5.1

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note δ^k le noyau obtenu en convoluant δ avec lui-même k fois :

$$\begin{aligned} \delta^k : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto \underbrace{\delta * \dots * \delta}_{k \text{ fois}}(a) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Définition 3.5.2

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note D_n^k le noyau de convolution défini par :

$$\begin{aligned} D_n^k : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto D_n * \delta^k(a) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Propriété 3.5.1

Les opérateurs $\underbrace{\Psi_{D_n} \circ \dots \circ \Psi_{D_n}}_{k \text{ fois}}$ et $\Psi_{D_n^k}$ sont équivalents.

Preuve

Soit $\Gamma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction discrète et soit $a \in \mathbb{Z}$ un point du domaine de définition de Γ .

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\Psi_{D_n} \circ \dots \circ \Psi_{D_n}}_{k \text{ fois}} \Gamma(a) &= \underbrace{\Psi_{D_n} \circ \dots \circ \Psi_{D_n}}_{k-1 \text{ fois}} * D_n * \Gamma(a) \\
 &= \underbrace{\Psi_{D_n} \circ \dots \circ \Psi_{D_n}}_{k-1 \text{ fois}} * H_n * \delta * \Gamma(a) \\
 &= \dots \\
 &= \underbrace{H_n * \delta * \dots * H_n * \delta}_{k \text{ fois}} \Gamma(a) \\
 &= H_n * \delta^k * \Gamma(a) \\
 &= D_n^k * \Gamma(a) \\
 &= \Psi_{D_n^k} \Gamma(a)
 \end{aligned}$$

□

L'utilisation de la propriété 3.5.1 permet de réduire la complexité de l'algorithme d'estimation de la dérivée k -ième. En effet, on obtient ainsi une complexité identique à celle de la dérivée première, c'est à dire en $\mathcal{O}(nm)$. Il convient toutefois de noter que la complexité du calcul du noyau D_n^k lui-même est plus importante que pour le noyau D_n . Cependant, cela n'est pas trop pénalisant puisque le calcul des noyaux de convolution peut être effectué une seule et unique fois à l'initialisation du programme.

3.5.2 Théorème de convergence

Comme pour la dérivée première, l'estimateur pour les dérivées d'ordre k est convergent.

Définition 3.5.3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre réel tel que $0 < \alpha \leq 1$. On définit la suite numérique $(\alpha_r)_{r \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\alpha_r = \left(\frac{2}{3}\right)^r \alpha \quad (3.31)$$

Théorème 3.5.1

Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+2} telle que $\phi^{(r)}$ soit bornée pour tout $r \in \{3, \dots, k+2\}$.

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ le pas de discrétisation.

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\Gamma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ une discrétisation de ϕ telle que pour tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq Kh^\alpha \quad (3.32)$$

Si :

$$n = \sum_{l=0}^{k-1} \left\lfloor h^{\frac{2(\alpha_l-3)}{3}} \right\rfloor \quad (3.33)$$

Alors il existe une fonction $\sigma_{\phi, \alpha, k} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma_{\phi, \alpha, k}(h) \in \mathcal{O}(h^{(\frac{2}{3})^k \alpha})$ lorsque $h \longrightarrow 0$ telle que :

$$\left| \frac{h^{-k+1}}{2^n} \Psi_{D_n^k} \Gamma(a) - \phi^{(k)}(ha) \right| \leq \sigma_{\phi, \alpha, k}(h) \quad (3.34)$$

3.5.3 Preuve

Nous allons maintenant démontrer ce théorème. Pour cela nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant.

Propriété 3.5.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = m + 2p$. Alors :

$$D_n^k = D_m^{k-1} * D_{2p} \quad (3.35)$$

Preuve

Par définition, nous avons que :

$$D_n^k(a) = H_n * \delta^k(a) = H_n * \delta^{k-1} * \delta(a)$$

De plus,

$$\begin{aligned} H_n(a) &= H_{n-2} * H_2(a) \\ &= \dots \\ &= H_{n-2p} * \underbrace{H_2 * \dots * H_2}_{p \text{ fois}}(a) \\ &= H_m * H_{2p}(a) \end{aligned}$$

En utilisant la commutativité de l'opérateur de convolution, on obtient finalement que :

$$\begin{aligned} D_n(a) &= H_m * H_{2p} * \delta^{k-1} * \delta(a) \\ &= H_m * \delta^{k-1} * H_{2p} * \delta(a) \\ &= D_n^{k-1} * D_{2p} \end{aligned}$$

□

Preuve (du théorème 3.5.1)

On démontre le résultat par récurrence sur k . Soit \mathcal{H}_k l'hypothèse de récurrence :

\mathcal{H}_k : « Il existe une fonction $\sigma_{\phi, \alpha, k} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma_{\phi, \alpha, k} \in \mathcal{O}(h(\frac{2}{3})^k \alpha)$ quand $h \rightarrow 0$ telle que $\left| \frac{h^{-k+1}}{2^n} \Psi_{D_n^k} \Gamma(a) - \phi^{(k)}(ha) \right| \leq \sigma_{\phi, \alpha, k}(h) \gg$

Pour $k = 0$:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{h^{-0+1}}{2^n} \Psi_{D_n^0} \Gamma(a) - \phi^{(0)}(ha) \right| \\ &= |h\Gamma(a) - \phi(ha)| \\ &\leq Kh^\alpha \end{aligned} \quad (\text{hypothèse 3.32})$$

Or $Kh^\alpha \in \mathcal{O}(h(\frac{2}{3})^0 \alpha)$. Par conséquent, \mathcal{H}_k est vraie pour $k = 0$.

Remarquons aussi que le cas $k = 1$ correspond au théorème 3.4.1. Ainsi, \mathcal{H}_k est aussi vraie pour $k = 1$.

Supposons que \mathcal{H}_{k-1} soit vraie c'est à dire :

\mathcal{H}_{k-1} : « Il existe une fonction $\sigma_{\phi, \alpha, k-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma_{\phi, \alpha, k-1} \in \mathcal{O}(h^{(\frac{2}{3})^{k-1} \alpha})$ quand $h \rightarrow 0$ telle que $\left| \frac{h^{-(k-1)+1}}{2^n} \Psi_{D_n^{k-1}} \Gamma(a) - \phi^{(k-1)}(ha) \right| \leq \sigma_{\phi, \alpha, k-1}(h) \gg$

Qu'en est-il de \mathcal{H}_k ?

Soit ν la quantité suivante :

$$\nu = \begin{cases} \lfloor h^{\frac{2(\alpha_{k-1}-3)}{3}} \rfloor & \text{si } \lfloor h^{\frac{2(\alpha_{k-1}-3)}{3}} \rfloor \text{ est pair} \\ \lfloor h^{\frac{2(\alpha_{k-1}-3)}{3}} \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.36)$$

Soit $n = \sum_{l=0}^{k-1} h^{\frac{2(\alpha_l-3)}{3}}$ et $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = n' + \nu$.

Par la propriété 3.5.2, nous avons que $D_n^k = D_n^{k-1} * D_\nu$ puisque ν est un nombre entier pair. En appliquant le théorème 3.4.1 à la fonction $\frac{h^{-k+1}}{2^{n'}} \Psi_{D_{n'}^{k-1}} \Gamma$, on déduit qu'il existe une fonction $\sigma_{\phi, \alpha_{k-1}}$ avec $\sigma_{\phi, \alpha_{k-1}} \in \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3} \alpha_{k-1}})$ et que :

$$\left| \frac{1}{2^\nu} \Psi_{D_\nu} \left(\frac{h^{-k+1}}{2^{n'}} \Psi_{D_{n'}^{k-1}} \Gamma \right) (a) - \phi^{(k)}(ha) \right| \leq \sigma_{\phi, \alpha_{k-1}}(h) \quad (3.37)$$

En posant $\sigma_{\phi, \alpha, k}(h) = \sigma_{\phi, \alpha_{k-1}}(h)$, on démontre que \mathcal{H}_k est vraie.

Puisque \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 sont vraies et puisque $\mathcal{H}_{k-1} \Rightarrow \mathcal{H}_k$ alors \mathcal{H}_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. \square

3.6 Illustrations et expérimentations

3.6.1 Optimal de convergence

Cette première illustration expérimentale (figure 3.6) montre la relation existant entre la taille du noyau et le pas de discrétisation pour réaliser l'optimal de convergence pour l'opérateur de dérivation. La surface bleue correspond à la majoration $\sigma_{\phi, \alpha}$ du théorème 3.4.1. La surface rouge, quant à elle, représente la dérivée partielle par rapport à h de la majoration. Enfin, la courbe violette représente les valeurs où la dérivée s'annule c'est à dire où la majoration est minimale. L'équation de cette courbe est donnée par l'équation 3.19.

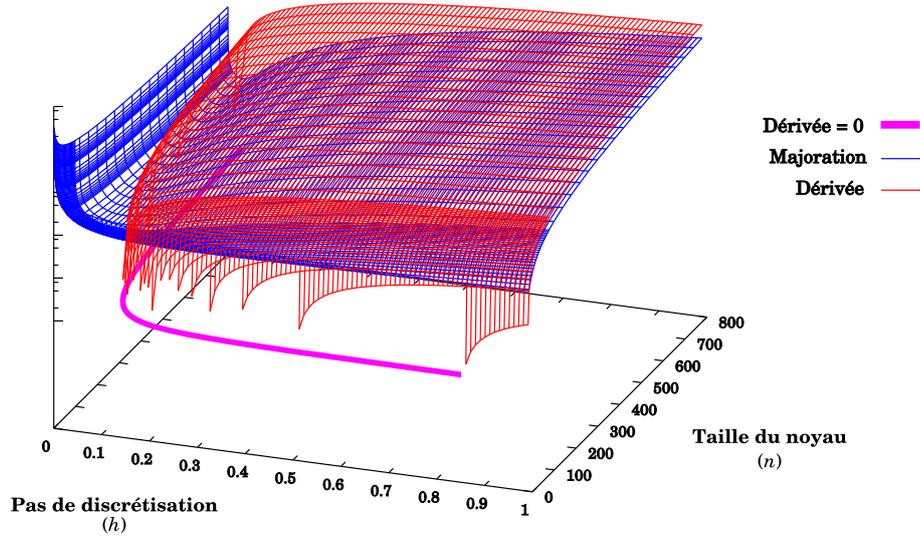


Fig. 3.6: Convergence théorique.

3.6.2 Étude complète de la dérivée d'une fonction

Au travers de cet exemple, nous allons étudier expérimentalement tous les aspects liés à notre estimateur de dérivées. Le principe général de ces expérimentations consiste à partir d'une fonction continue, puis de la discrétiser et enfin de comparer la dérivée discrète estimée avec la dérivée théorique continue. Soit f la fonction continue :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \end{aligned} \quad (3.38)$$

En tant que fonction trigonométrique, f est C^∞ et sa dérivée troisième est bornée ; elle respecte donc parfaitement les hypothèses imposées par le théorème de convergence. La dérivée théorique continue de cette fonction est la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f' : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(2\pi x) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Commençons avec quelques figures (de 3.7 à 3.11) illustrant l'estimation discrète de la dérivée pour un pas de discrétisation $h = 0.014$ et différentes tailles de noyau. Sur toutes ces figures, les courbes noires représentent la fonction f et les courbes rouges la fonction f' . Notons aussi que, pour des raisons de clarté, la dérivée est étirée verticalement d'un facteur 8.

Avec la figure 3.12, nous examinons plus en détail la qualité de l'estimation en fonction de la taille du noyau de dérivation et du pas de discrétisation. Les résultats obtenus sur ce cas particulier semblent en accord avec les résultats théoriques du théorème 3.4.1. En effet, on constate que la zone où l'estimation est la meilleure (c'est à dire la zone pour laquelle l'erreur cumulée est minimale) a l'allure du graphe de la figure 3.6.

La figure 3.13 quantifie aussi la qualité de l'estimateur de dérivées mais représente l'erreur maximale commise plutôt que l'erreur cumulée. De plus, la figure 3.13 montre aussi la différence entre les noyaux de taille paire et ceux de taille impaire. À ce propos, remarquons que si pour des pas de discrétisation assez grands les noyaux de taille paire sont significativement

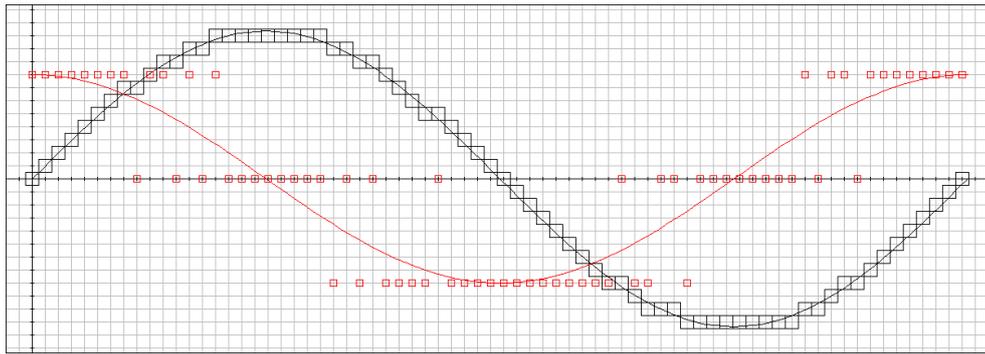


Fig. 3.7: Pour $n = 0$, on obtient l'estimation de la dérivée au sens des différences finies arrières.

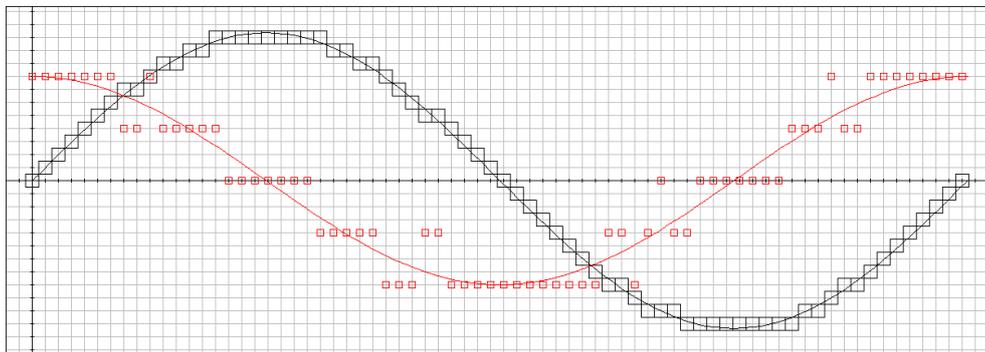


Fig. 3.8: Pour $n = 1$, notre estimateur de dérivée est équivalent à l'estimateur des différences finies centrées.

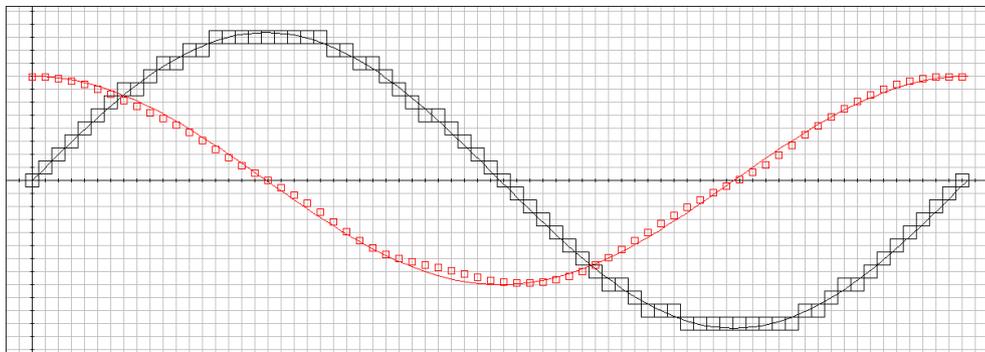


Fig. 3.9: Ici $n = 31$. L'estimation discrète de la dérivée est très proche du résultat théorique attendu.

moins bons que ceux de taille impaire, cela n'est plus aussi important lorsque l'on utilise un petit pas de discrétisation.

On s'intéresse maintenant au temps de calcul nécessaire à l'estimation de la dérivée en fonction de la taille du noyau et du pas de discrétisation. Les résultats, reportés à la figure 3.14, sont exprimés en nombre de cycles processeurs⁴. Pour toutes les paires de paramètres (h, n) , la mesure est effectuée 10 fois ; les données retranscrites ici sont la moyennes de ces 10 mesures.

⁴Reporter des temps d'exécution en millisecondes n'est pas forcément très judicieux puisque cette mesure varie d'une machine à l'autre. Le nombre de cycles processeur est déterminé en utilisant l'instruction RDTSC des processeurs Intel modernes. Cette instructions permet d'accéder à un compteur interne du processeur qui compte le nombre total d'instructions exécutées depuis le démarrage de l'ordinateur.

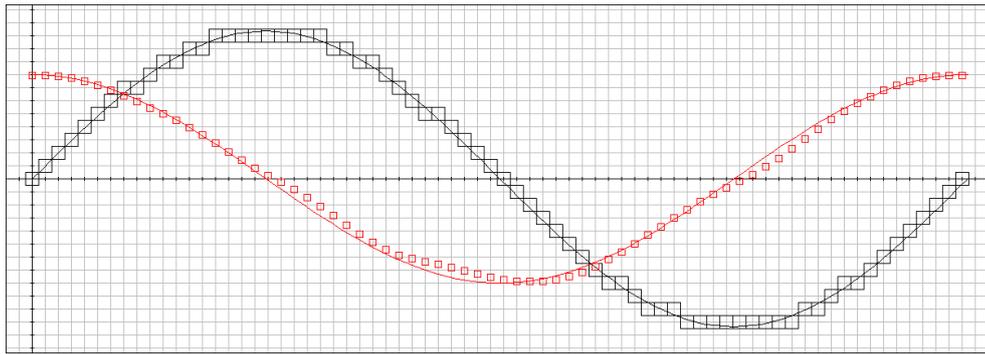


Fig. 3.10: Avec $n = 32$, l'estimation est très proche du cas $n = 31$. Cependant on constate que l'estimation est très légèrement moins bonne que dans le cas précédent. Cela provient du fait que le noyau est de taille paire et donc qu'il n'est pas parfaitement centré sur 0.

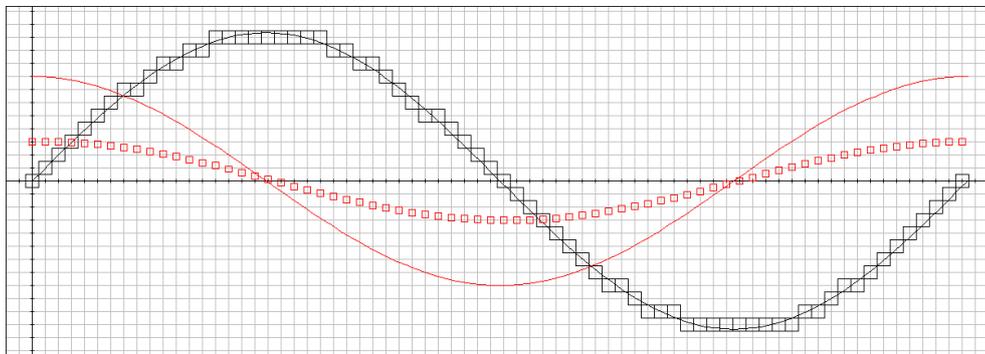


Fig. 3.11: Cette estimation a été réalisée avec un noyau de très grande taille ($n = 1000$). L'estimation est très mauvaise. En effet, le calcul de la dérivée avec ce type de noyau utilise des points très éloignés du point considéré.

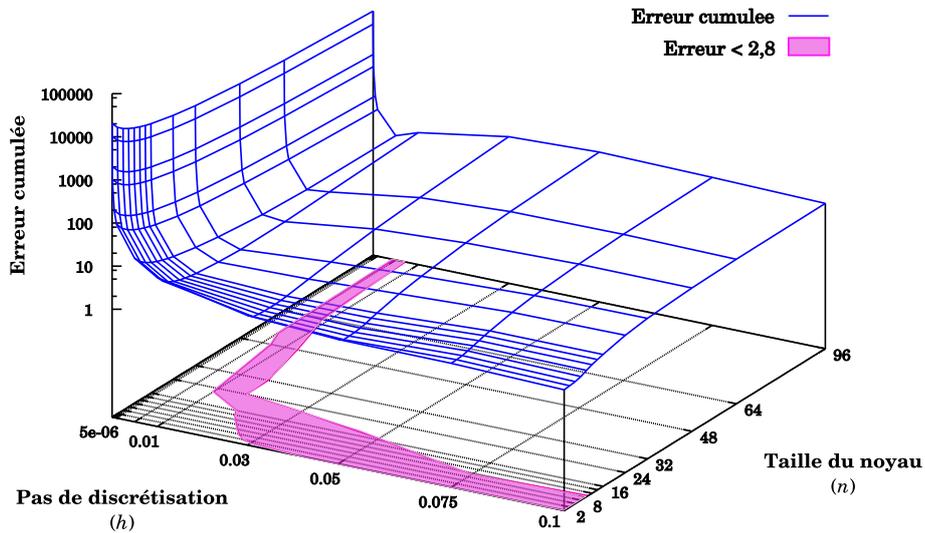


Fig. 3.12: Erreur cumulée et zone de convergence optimale.

En étudiant la figure 3.14, on constate que la principale composante déterminant le temps de calcul est en fait le pas de discrétisation. Bien qu'entraînant un surcoût en temps de calcul, l'utilisation d'un noyau de grande taille reste raisonnable. Cela est particulièrement

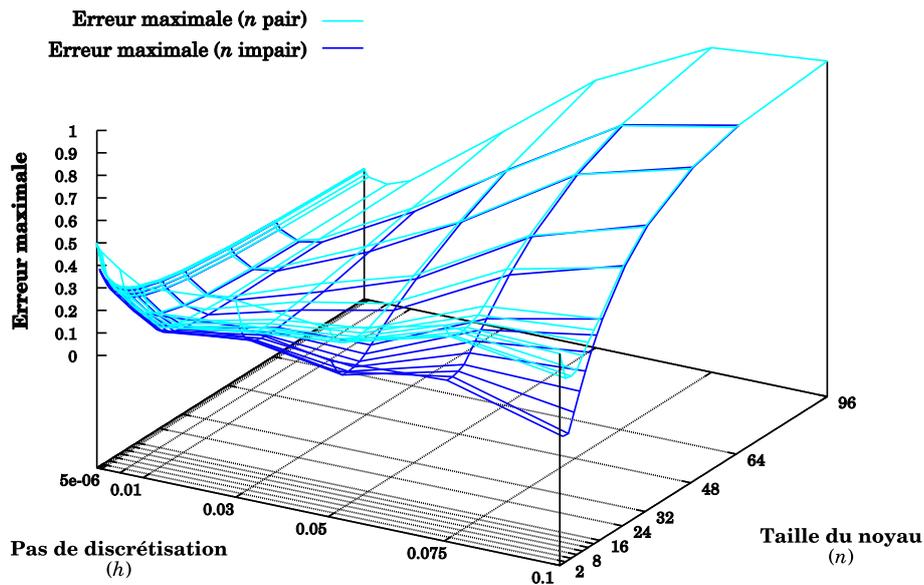


Fig. 3.13: Comparaison de l'erreur maximale pour les noyaux pairs et impairs.

vrai lorsque le nombre de points de la fonction discrète à dériver est important.

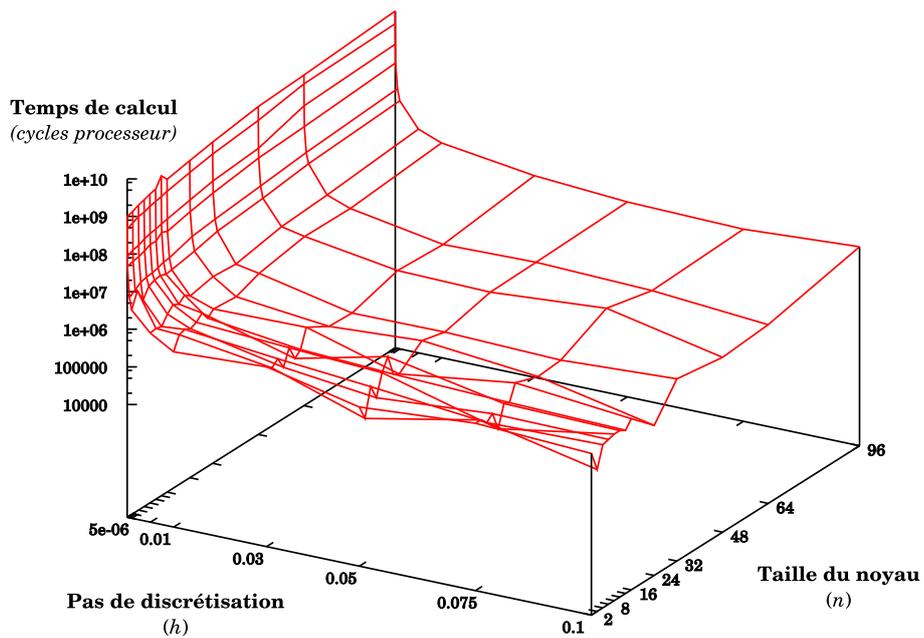


Fig. 3.14: Temps de calcul requis pour l'estimation de dérivées discrètes.

La dernière expérimentation menée sur cet exemple consiste à étudier la taille des nombres entiers utilisés lors du calcul de la dérivée. Tous les nombres utilisés ont été examinés : aussi bien ceux des valeurs initiales et du résultats que ceux employés dans les calculs intermédiaires. Les résultats sont reportés à la figure 3.15. Cette expérimentation est intéressante puisqu'elle permet de se rendre compte des tailles de noyaux utilisables si l'on ne veut pas faire appel à une librairie de calcul en précision arbitraire et rester dans les limites supportées par la machine. La ligne verte en pointillés donne d'ailleurs cette limite. Ainsi, si l'on ne veut (peut)

pas utiliser d'entiers supérieurs à 2^{32} , on ne doit pas dépasser 32 pour la taille des noyaux. Bien entendu, cette limite n'est valable que pour cet exemple particulier (pour lequel les données de bases ne sont pas de grands nombres) et pour une machine en 32 bits.

Notons enfin que le pas de discrétisation n'influe que très peu sur la taille des entiers. En effet, le seul rapport entre la taille des entiers et la pas de discrétisation se situe au niveau de la fonction discrète de base : plus le pas de discrétisation est fin, plus les valeurs de la fonction sont importantes. Toutefois, il n'y a pas d'explosion des valeurs intermédiaires comme c'est le cas avec l'accroissement de la taille du noyau de dérivation.

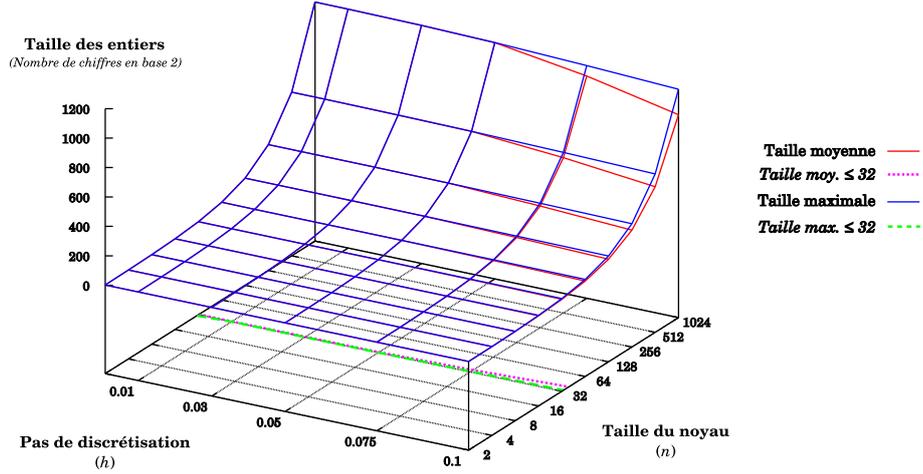


Fig. 3.15: Taille des entiers utilisés lors de l'estimation de dérivées discrètes.

3.6.3 Dérivées d'ordre supérieur

Prenons maintenant un autre exemple pour illustrer l'estimation des dérivées discrètes d'ordre supérieur. On appelle ϕ la fonction continue sur laquelle repose cette expérimentation :

$$\begin{aligned} \phi : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Comme pour l'exemple précédent, on utilise une fonction trigonométrique assurant ainsi les hypothèses requises par le théorème de convergence. On considère ici que les arrondis effectués lors de la discrétisation sont assimilables à un bruit uniformément majoré.

Toutes les illustrations qui suivent sont réalisées avec un pas de discrétisation $h = \frac{1}{20}$.

La figure 3.16 illustre l'estimation des dérivées des trois premiers ordres en faisant l'hypothèse que le bruit est modélisé par le paramètre $\alpha = 0.7$ (voir l'équation 3.31 du théorème de convergence pour les dérivées d'ordre supérieur). La taille du noyau à utiliser pour estimer les dérivées aux différents ordres est déduite automatiquement à partir de la relation 3.33. Ainsi, la dérivée première est estimée avec l'opérateur $\Psi_{D_{99}}$, la dérivée seconde avec $\Psi_{D_{199}^2}$ et la dérivée troisième grâce à $\Psi_{D_{299}^3}$.

Quoique la taille du noyau de dérivation soit choisie de manière à obtenir la meilleure convergence possible, on remarque sur la figure 3.16 que l'estimation se dégrade pour les plus grands ordres de dérivation.

L'hypothèse $\alpha = 0.7$ du cas précédent est assez empirique. Si l'on essaye de prendre $\alpha = 1$, c'est à dire l'hypothèse de bruit minimal, on obtient les estimateurs de dérivées $\Psi_{D_{53}}$, $\Psi_{D_{107}^2}$

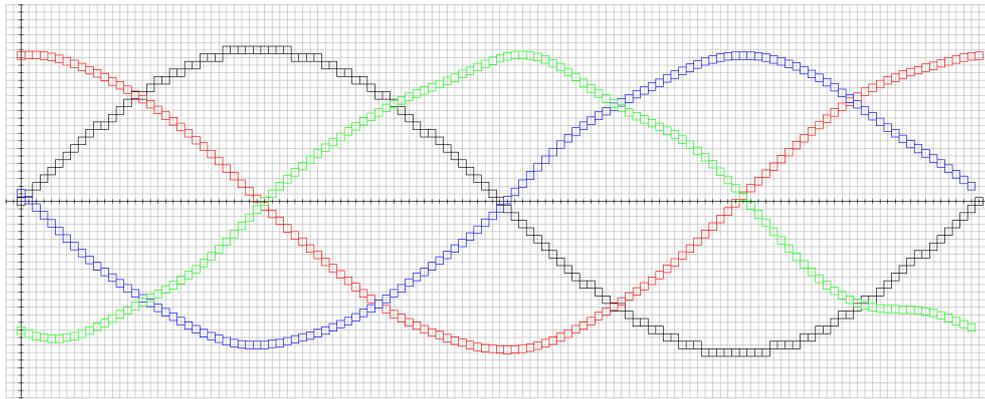


Fig. 3.16: Dérivées d'ordre supérieur sous l'hypothèse $\alpha = 0.7$. La discrétisation de ϕ est représentée en noir et les dérivées première, seconde et troisième respectivement en rouge, bleu et vert.

et $\Psi_{D_{159}^3}$ et les dérivées résultantes de la figure 3.17. Cette hypothèse d'inexistence du bruit n'est pas réaliste; En effet, comme nous l'avons déjà dit, les erreurs d'arrondis dues à la discrétisation sont assimilables à un bruit non nul. Cela est confirmé par l'expérience puisque nous constatons sur la figure 3.17 que l'estimation des dérivées jusqu'à l'ordre 3 est moins bonne que dans le cas précédent ($\alpha = 0.7$).

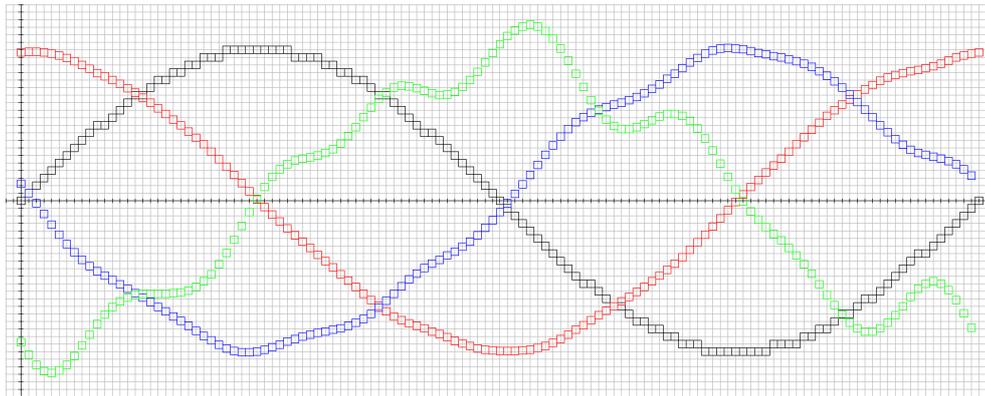


Fig. 3.17: Dérivées d'ordre supérieur sous l'hypothèse $\alpha = 1$.

Les deux cas précédents révèlent qu'il est parfois nécessaire d'utiliser des noyaux de taille élevée pour atteindre les optimaux de convergence. Malheureusement, il n'est possible d'utiliser ces noyaux de grande taille que si l'on a recours à une bibliothèque d'entiers longs. Voyons ce qu'il se passe si l'on détermine la taille des noyaux non pas en fonction du pas de discrétisation h et de la modélisation du bruit α mais en fonction des contraintes arithmétiques d'un ordinateur 32 bits. Pour cela, nous utilisons les noyaux D_{19}^k pour $k = 1, 2, 3$. La figure 3.18 montre les résultats obtenus. On constate sur cette illustration que seule l'estimation de la dérivée première est acceptable. En revanche, les estimations des dérivées seconde et troisième sont, n'ayant pas peur des mots, mauvaises. Sachant que l'utilisation d'une bibliothèque d'entiers longs est, en définitive, assez peu coûteuse, cette expérience incite à déterminer la taille des noyaux grâce à la relation 3.33 du théorème de convergence plutôt qu'à partir de considérations relatives au matériel.

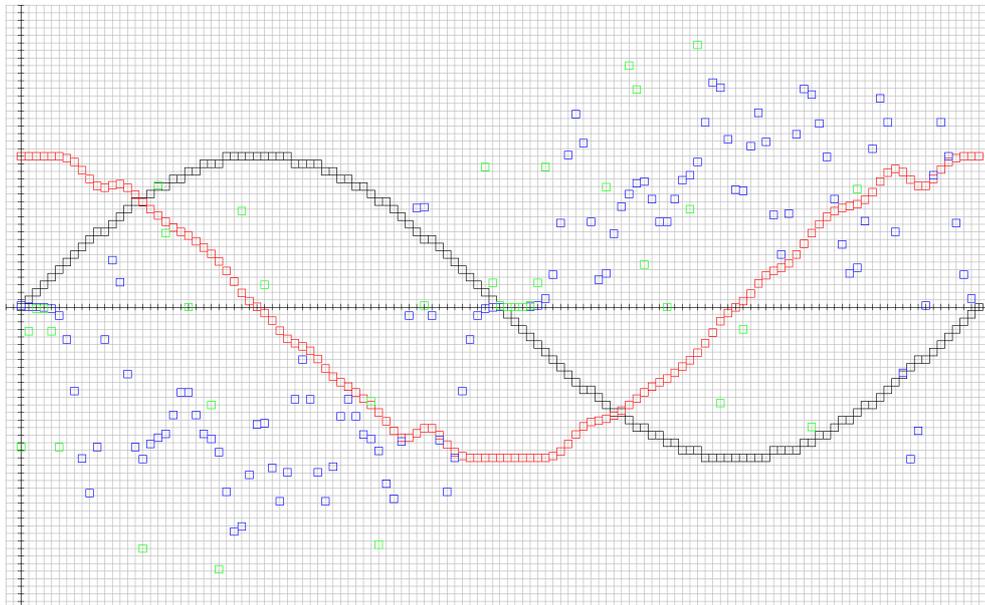


Fig. 3.18: Dérivées d'ordre supérieur en utilisant des noyaux calculables nativement par une machine 32 bits.

Chapitre 4

Cas des fonctions à plusieurs variables

Nous allons maintenant construire un estimateur de dérivée pour les fonctions à plusieurs variables c'est à dire les fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} . Ces fonctions ont une importance toute particulière puisque, par exemple, une image numérique n'est jamais qu'une fonction de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z} . L'extension de l'estimateur de dérivées vu à la section précédente se réalise tout simplement en appliquant le même principe qui est utilisé dans le domaine continu pour le calcul des dérivées partielles d'une fonction. Ainsi, on ne calcule la dérivée d'une fonction que par rapport à une seule de ses variables, les autres étant gardées constantes.

4.1 Notations et définitions

La seule difficulté de cette extension réside dans les notations. C'est pourquoi nous allons commencer par définir les conventions et notations utilisées.

Notation 4.1.1

Soit \mathcal{M} un module et $p \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel strictement positif. On appelle $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}^p$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{Z}^p à valeur dans \mathcal{M} .

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}^p = \{F | F : \mathbb{Z}^p \longrightarrow \mathcal{M}\} \quad (4.1)$$

Définition 4.1.1 (Noyau multidimensionnel)

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Soient H_1, \dots, H_q des noyaux de convolution à support fini. On définit le noyau de convolution multidimensionnel, noté (H_1, \dots, H_q) par :

$$\begin{aligned} (H_1, \dots, H_q) : \quad & \mathbb{Z}^q \longrightarrow \mathcal{M} \\ (x_1, \dots, x_q) & \longmapsto H_1(x_1) \times \dots \times H_q(x_q) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Remarque 4.1.1

Si les supports de H_1, \dots, H_q sont respectivement les ensembles E_1, \dots, E_q alors le support de $H = (H_1, \dots, H_q)$ est le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_q$.

Définition 4.1.2 (Produit de convolution multidimensionnel)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $F : \mathbb{Z}^p \longrightarrow \mathcal{M}$ et $H = (H_1, \dots, H_p) : \mathbb{Z}^p \longrightarrow \mathcal{M}$ un noyau de convolution multidimensionnel. Le produit de convolution multidimensionnel de F avec H , noté $F * H$,

est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 F * H : \quad \mathbb{Z}^p &\longrightarrow \mathcal{M} \\
 (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_p \in \mathbb{Z}} H(i_1, \dots, i_p) F(x_1 - i_1, \dots, x_p - i_p)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Définition 4.1.3 (Opérateur de convolution)

De manière similaire à la dimension 1, on définit un opérateur de convolution associé au produit de convolution multidimensionnel. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $H = (H_1, \dots, H_p) : \mathbb{Z}^p \longrightarrow \mathcal{M}$. L'opérateur de convolution multidimensionnel de noyau H , noté Ψ_H est défini ainsi :

$$\begin{aligned}
 \Psi_H : \mathcal{L}_{\mathcal{M}}^p &\longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}}^p \\
 F &\longmapsto F * H
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Remarque 4.1.2

Que ce soit pour les noyaux ou le produit de convolution, on omettra volontiers le terme *multidimensionnel* puisque le contexte permettra généralement de savoir de quoi on parle.

4.2 Calculs pratiques

Supposons que A_1, \dots, A_p soient les supports respectifs des noyaux H_1, \dots, H_p et supposons que F soit définie sur $B_1 \times \dots \times B_p$. Notons a_1, \dots, a_p les cardinaux des ensembles A_1, \dots, A_p et b_1, \dots, b_p ceux de B_1, \dots, B_p . Si l'on utilise directement la définition 4.1.2, le calcul du produit de convolution multidimensionnel peut être effectué en $\mathcal{O}(\prod_{i=1}^p (a_i b_i))$. Nous allons voir que cette complexité peut être améliorée.

Définition 4.2.1 (Noyau identité)

On définit le noyau de convolution *identité*, noté I , par :

$$\begin{aligned}
 I : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathcal{M} \\
 a &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Propriété 4.2.1

Le noyau I est l'élément neutre pour la convolution c'est à dire que pour toute fonction $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{M}$, $\Psi_I F = F$.

Preuve

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 \Psi_I F(a) &= F * I(a) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} I(i) F(a - i) \\
 &= I(0) F(a) \\
 &= F(a)
 \end{aligned}$$

□

Propriété 4.2.2 (Séparabilité)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $F \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}^p$. Soit $H = (H_1, \dots, H_p)$. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, soit $G_i =$

(G_1, \dots, G_p) le noyau de convolution tel que $G_k = I$ si $k \neq i$ et $G_i = H_i$. On a alors la propriétés suivante :

$$\Psi_H F = \Psi_{G_1} \circ \Psi_{G_2} \circ \dots \circ \Psi_{G_p} F \quad (4.6)$$

La convolution d'une fonction F avec un noyau G_i de la propriété 4.2.2 revient à appliquer le produit de convolution par rapport à la i -ième variable de F tout en gardant les autres inchangées. En pratique, il n'est donc nullement besoin d'effectuer les calculs pour les $i - 1$ variables fixées. Si l'on reprend les notations précédentes concernant les cardinaux, le calcul de la convolution avec G_i est ainsi réalisable en $\mathcal{O}(a_i \prod_{i=1}^p b_i)$. Par conséquent, le calcul de la convolution avec le noyau H complet est fait en $\mathcal{O}((\sum_{i=1}^p a_i) (\prod_{i=1}^p b_i))$

4.3 Théorème de convergence

Notation 4.3.1

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \dots, p\}$. On note par $D_{n,i}$ le noyau défini par :

$$D_{n,i} = (d_0, \dots, d_p) \quad (4.7)$$

où $d_j = I$ si $j \neq i$ et $d_i = D_n$.

Le noyau $D_{n,i}$ est le noyau utilisé pour calculer la dérivée partielle d'une fonction $F \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}^p$ par rapport à la i -ième variable.

Le théorème suivant est une simple adaptation du théorème de convergence pour le cas des fonctions réelles. Il donne le résultat de convergence pour l'estimation des dérivées partielles des fonctions discrètes de \mathbb{Z}^p à valeur dans \mathbb{Z} .

Théorème 4.3.1

Soit $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 telle que $\phi^{(3)}$ soit bornée.

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ le pas de discrétisation.

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\Gamma : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une discrétisation de ϕ telle que pour tout $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$:

$$|h\Gamma(a_1, \dots, a_p) - \phi(ha_1, \dots, ha_p)| \leq Kh^\alpha \quad (4.8)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ et soit a_i la variable par rapport à laquelle la dérivée partielle est calculée. Si :

$$n = \left\lfloor h^{\frac{2(\alpha-3)}{3}} \right\rfloor \quad (4.9)$$

Alors il existe une fonction $\sigma_{\phi,\alpha} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma_{\phi,\alpha}(h) \in \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}\alpha})$ lorsque $h \rightarrow 0$ telle que :

$$\left| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_{n,i}} \Gamma(a_0, \dots, a_p) - \frac{\partial}{\partial a_i} \phi(ha_1, \dots, ha_p) \right| \leq \sigma_{\phi,\alpha}(h) \quad (4.10)$$

Preuve

Pour $j \neq i$, fixons les $p - 1$ variables a_j aux valeurs \bar{a}_j . Soient $\bar{\Gamma} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et $\bar{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto \Gamma(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, a, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_p) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \phi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, a, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_p) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Par construction, les fonctions $\bar{\Gamma}$ et $\bar{\phi}$ respectent les hypothèses du théorème 3.4.1. En appliquant ce théorème, on sait qu'il existe une fonction $\bar{\sigma}_{\bar{\phi},\alpha}(h) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\bar{\sigma}_{\bar{\phi},\alpha} \in \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}\alpha})$ quand $h \longrightarrow 0$ telle que :

$$\left| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \bar{\Gamma}(a) - \bar{\phi}'(ha) \right| \leq \bar{\sigma}_{\bar{\phi},\alpha}(h) \quad (4.13)$$

Puisque par hypothèse, $\phi^{(3)}$ est bornée, on en déduit qu'il existe une fonction $\sigma_{\phi,\alpha} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma_{\phi,\alpha} \in \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}\alpha})$ quand $h \longrightarrow 0$ telle que :

$$\left| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_{n,i}} \Gamma(a_0, \dots, a_p) - \frac{\partial}{\partial a_i} \phi(ha_1, \dots, ha_p) \right| \leq \sigma_{\phi,\alpha}(h) \quad (4.14)$$

□

4.4 Utilisation de noyaux rectangulaires

Comme le montre la figure 4.1 pour le cas $p = 2$, le calcul de la dérivée partielle par rapport à une variable ne fait intervenir que des valeurs de la fonction situées dans la même direction que le sens de dérivation. Cela provient du fait que le noyau utilisé a une forme de ligne. Si cela ne pose pas de problème pour des fonctions peu bruitées, ce n'est pas le cas pour des fonctions bruitées. En effet, on peut faire l'hypothèse que les valeurs de la fonction sont similaires dans le voisinage d'un point considéré et, cela, quelle que soit la direction dans laquelle on regarde. Dans le cas de fonctions bruitées, il peut donc être intéressant de régulariser localement la fonction en considérant toutes les directions et pas uniquement celle de la dérivation. Pour cela, on peut utiliser des noyaux de dérivation plus complexes, de formes rectangulaires. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

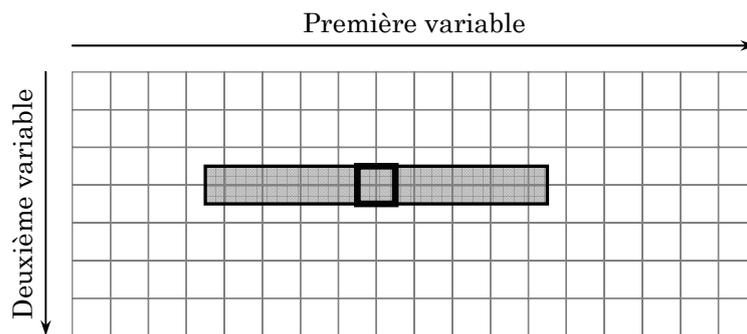


Fig. 4.1: Illustration du calcul de la dérivée partielle par rapport à la première variable. Les intersections de la grille représentent \mathbb{Z}^2 . La zone grisée est la trace du noyau de dérivation (le carré plus épais en son centre correspond au point où l'on est en train de calculer la dérivée).

L'action de régularisation locale d'une fonction est obtenue en appliquant une convolution avec le noyau moyenné H_n . L'idée est donc d'appliquer le noyau de dérivation D_n dans le sens de la dérivation et le noyau moyenné dans les autres directions, c'est à dire les directions des variables fixées.

Définition 4.4.1

Soit $N = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$. On appelle \mathcal{H}_N le noyau de convolution multidimensionnel $(H_{n_1}, \dots, H_{n_p})$.

Une convolution avec le noyau \mathcal{H}_N a pour effet de régulariser localement la fonction à laquelle il est appliqué. Le vecteur N permet de contrôler l'importance de la régularisation selon les différentes directions principales de l'espace \mathbb{Z}^p .

Définition 4.4.2

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. On note Δ_i le noyau de convolution (d_1, \dots, d_p) où $d_j = I$ pour $j \neq i$ et $d_i = \delta$.

Ce noyau est l'équivalent pour le cas multidimensionnel du noyau des différences finies arrières en ne considérant que la direction de la i -ième variable.

Définition 4.4.3

Soit $N = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ et soit $i \in \{1, \dots, p\}$. On définit le noyau $\mathcal{D}_{N,i}$ par :

$$\mathcal{D}_N = (d_1, \dots, d_p) \tag{4.15}$$

où $d_j = H_{n_j}$ pour $j \neq i$ et $d_i = D_{n_i}$.

Remarque 4.4.1

Le noyau $\mathcal{D}_{N,i}$ est aussi égal à la convolution du noyau \mathcal{H}_N avec le noyau Δ_i . On retrouve ainsi le principe de la définition du noyau D_n qui était, pour mémoire, la convolution des noyaux H_n et δ .

Définition 4.4.4

Soit $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $\Gamma : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{Z}$ sa discrétisation (éventuellement bruitée). Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ et soit $N = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$. La dérivée partielle discrète de Γ par rapport à la i -ième variable est estimée grâce à l'opération suivante :

$$\frac{1}{2^{\sum_{k=1}^p n_k}} \Psi_{\mathcal{D}_{N,i}} \Gamma \tag{4.16}$$

La figure 4.2 illustre le principe général de l'estimation de dérivée partielle discrète en utilisant un noyau rectangulaire.

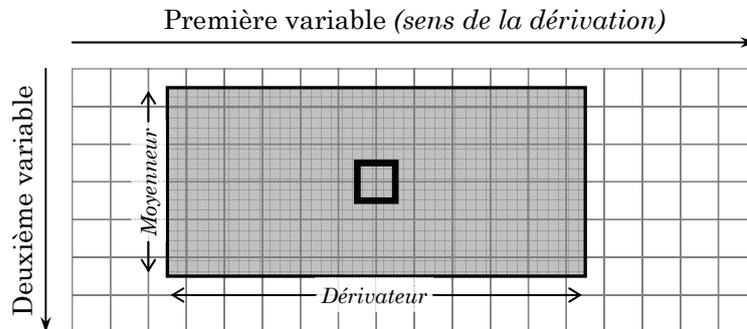


Fig. 4.2: Illustration du calcul de la dérivée partielle par rapport à la première variable en utilisant un noyau rectangulaire. Les intersections de la grille représentent \mathbb{Z}^2 . La zone grisée est la trace du noyau de dérivation (la carré plus épais au centre de cette zone correspond au point où l'on veut estimer la dérivée partielle).

De la même manière que pour les cas précédents, nous avons un théorème donnant la vitesse de convergence de l'estimateur.

Théorème 4.4.1

Soit $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 telle que $\phi^{(3)}$ soit bornée.

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ le pas de discrétisation.

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\Gamma : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une discrétisation de ϕ telle que pour tout $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$:

$$|h\Gamma(a_1, \dots, a_p) - \phi(ha_1, \dots, ha_p)| \leq Kh^\alpha \quad (4.17)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ et soit a_i la variable par rapport à laquelle la dérivée partielle est calculée.

Enfin, soit $N = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$.

Si :

$$n = \left\lfloor h^{\frac{2(\alpha-3)}{3}} \right\rfloor \quad (4.18)$$

Alors il existe une fonction $\sigma_{\phi, \alpha} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma_{\phi, \alpha}(h) \in \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}\alpha})$ lorsque $h \rightarrow 0$ telle que :

$$\left| \frac{1}{2^{\sum_{k=1}^p n_k}} \Psi_{\mathcal{D}_{N,i}} \Gamma(a_0, \dots, a_p) - \frac{\partial}{\partial a_i} \phi(ha_1, \dots, ha_p) \right| \leq \sigma_{\phi, \alpha}(h) \quad (4.19)$$

4.5 Dérivées directionnelles

Une autre manière d'étendre notre estimateur de dérivées pour les fonctions discrètes à plusieurs variables consiste à considérer les dérivées directionnelles. Commençons cette partie en introduisant la notion de dérivée directionnelle pour les fonctions continues à plusieurs variables¹.

Définition 4.5.1

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à plusieurs variables. Soient $u \in \mathbb{R}^p$ et $d \in \mathbb{R}^p$ deux vecteurs. La dérivée de f au point u dans la direction du vecteur d , notée $D_d f(u)$, est la fonction :

$$\begin{aligned} D_d f : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + td) - f(u)}{t} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Bien entendu, cette fonction n'est définie que si la limite l'est aussi.

Remarque 4.5.1

Les dérivées partielles d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ sont un cas particulier des dérivées directionnelles où l'on prend pour la direction d des vecteurs particuliers (en l'occurrence, un des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^p).

Propriété 4.5.1

Soit h un vecteur de \mathbb{R}^p de coordonnées (h_1, \dots, h_p) dans la base canonique de \mathbb{R}^p . Soient $u \in \mathbb{R}^p$ et $d \in \mathbb{R}^p$ deux vecteurs de \mathbb{R}^p . La dérivée directionnelle de f au point u dans la direction du vecteur d est égale à :

$$D_d f(u) = \sum_{i=1}^p d_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(u) \quad (4.21)$$

¹Les définitions et notations utilisées ici sont principalement issues de [2].

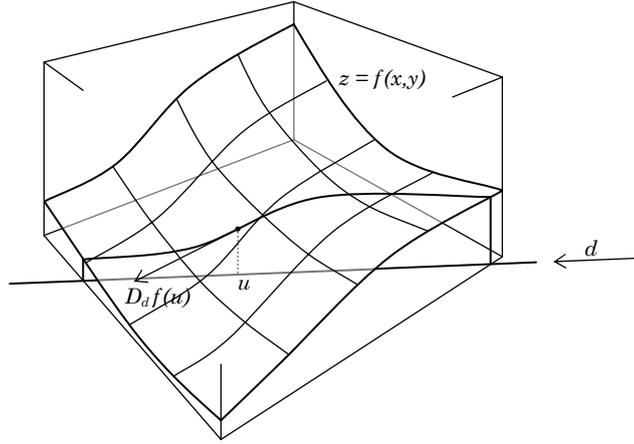


Fig. 4.3: Dérivée de f au point u dans la direction du vecteur d .

L'adaptation au cas des fonctions discrètes à plusieurs variables consiste simplement à estimer les dérivées partielles par les méthodes vues précédemment et à prendre comme direction une droite discrète de \mathbb{Z}^p (voir section 5.2 pour plus de détails sur les droites discrètes). Si l'on utilise un noyau sous forme de ligne pour le calcul des dérivées, on choisira des droites discrètes naïves ou standard. Pour l'utilisation de noyaux rectangulaires, on pourra prendre pour support une droite discrète épaisse (dont l'épaisseur correspond à la largeur du noyau).

4.6 Dérivées d'ordre supérieur

Dans le cas des fonctions à plusieurs variables, les dérivées d'ordre supérieur désignent plusieurs choses. Il peut s'agir de la dérivée seconde par rapport à une seule variable ou alors de la dérivation simultanée par rapport à plusieurs variables.

Notation 4.6.1

Par convention, on considère que le noyau D_n^0 est le noyau identité I .

Définition 4.6.1

Soient $K = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$ et $N = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$. On appelle \mathcal{D}_N^K le noyau de convolution multidimensionnel défini par :

$$\mathcal{D}_N^K = (D_{n_1}^{k_1}, \dots, D_{n_p}^{k_p}) \quad (4.22)$$

Le noyau \mathcal{D}_N^K permet de calculer les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction à plusieurs variables.

Conjecture 4.6.1

Soit $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+2} telle que $\phi^{(r)}$ soit bornée pour tout $r \in \{3, \dots, k+2\}$.

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ le pas de discrétisation.

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\Gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ une discrétisation de ϕ telle que pour tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq Kh^\alpha \quad (4.23)$$

Si :

$$n = \sum_{l=0}^{-1+\sum_{j=1}^p k_j} \left\lfloor h^{\frac{2(\alpha_l-3)}{3}} \right\rfloor \quad (4.24)$$

où $(\alpha_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est la suite donnée par la définition 3.5.3.

Alors il existe une fonction $\sigma_{\phi, \alpha, K} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec :

$$\sigma_{\phi, \alpha, K}(h) \in \mathcal{O}\left(h^{\alpha\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{j=1}^p k_j}\right) \quad \text{lorsque } h \longrightarrow 0 \quad (4.25)$$

telle que :

$$\left| \frac{h^{-1+\sum_{j=1}^p k_j}}{2^{\sum_{j=1}^p k_j}} \Psi_{\mathcal{D}_N^K} \Gamma(a_1, \dots, a_p) - \frac{\partial^{\sum_{j=1}^p k_j}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_p^{k_p}} \phi(ha_1, \dots, ha_p) \right| \leq \sigma_{\phi, \alpha, K}(h) \quad (4.26)$$

Jusqu'à présent, aucune preuve n'a été rédigée pour démontrer la conjecture 4.6.1 ; seuls quelques résultats expérimentaux laissent penser que cette conjecture est vérifiée. Remarquons aussi que pour $p = 1$, la conjecture est équivalente au théorème 3.5.1 pour le cas des fonctions à une seule variable.

4.7 Expériences

Pour illustrer notre estimateur de dérivées pour les fonctions à plusieurs variables, nous allons réaliser un ajustement de modèle pour trouver un contour dans une image bruitée.

Pour commencer, nous construisons une image test (représentée en 4.4) non bruitée avec un contour dont on connaît précisément la nature. Sur cette image originale, le contour entre la partie blanche et la partie noire est un arc de parabole.

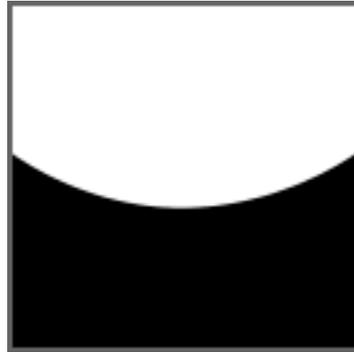


Fig. 4.4: L'image d'origine, non bruitée (le cadre gris ne fait pas parti de l'image).

On applique ensuite à cette image un bruit blanc gaussien additif comme cela est illustré par la figure 4.5.

Avant de continuer, donnons quelques définitions utiles à la poursuite de cet exemple.

Définition 4.7.1 (Gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ une fonction. Le gradient de f , noté ∇f , est la fonction vectorielle définie par :

$$\begin{aligned} \nabla f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

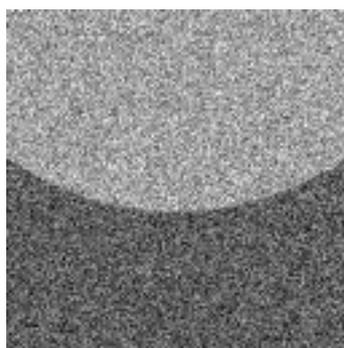


Fig. 4.5: Image bruitée avec un bruit blanc gaussien additif.

Cette définition est valable pour les fonctions à deux variables mais elle est facilement adaptable pour des fonctions à p variables, $p > 2$.

Définition 4.7.2 (Amplitude du gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$. On appelle *amplitude du gradient de f selon la norme euclidienne*, souvent abrégé en *amplitude du gradient de f* , la fonction :

$$\|\nabla f\|_2 : \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} \quad (4.28)$$

En utilisant notre estimateur de dérivées partielles, on peut ainsi définir l'amplitude du gradient pour les fonctions discrètes.

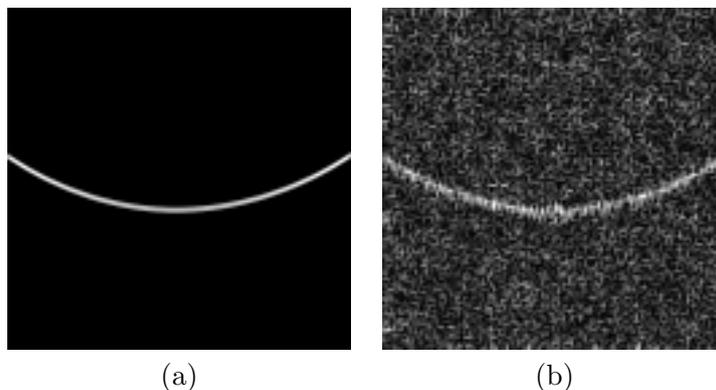


Fig. 4.6: Amplitude du gradient de la fonction représentant (a) l'image originale (b) l'image bruitée.

La figure 4.6 représente l'amplitude du gradient calculée sur l'image d'origine et sur l'image bruitée.

Pour en revenir à l'exemple, on sait que le contour à ajuster a pour équation un polynôme de degrés 2. On cherche donc 3 points appartenant au contour, l'équation de la parabole étant déduite par interpolation polynomiale.

Un contour dans une image est une zone de forte variation des couleurs. Cela se traduit par un passage au maximum de l'amplitude du gradient. Par conséquent, pour trouver les points supports de la parabole, on cherche 3 valeurs maximales de l'amplitude du gradient

de l'image. En fait, pour cet exemple, on ne cherche pas ces 3 points maximaux sur tout le domaine de définition de $\|\nabla f\|_2$ mais on ne considère que trois colonnes situées au $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{8}$ de la largeur de l'image.

La figure 4.7 illustre les résultats obtenus avec des noyaux de tailles différentes. On remarque sur ces illustrations que si le noyau n'est pas suffisamment grand, l'ajustement est mauvais. En effet, si le noyau est trop petit, son effet d'atténuation du bruit est moindre.

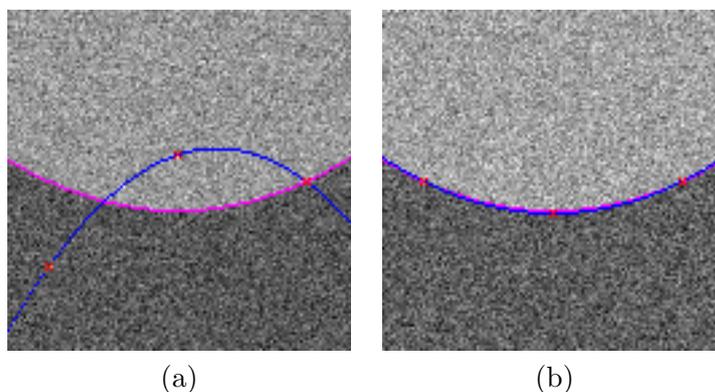


Fig. 4.7: Ajustement d'un contour parabolique sur une image bruitée. Les dérivées partielles sont calculées avec des noyaux de tailles différentes : $\Psi_{D_{15}}$ pour (a) et $\Psi_{D_{41}}$ pour (b)

Enfin, les derniers résultats expérimentaux étudient la qualité de l'ajustement en fonction de l'intensité du bruit qui est appliqué à l'image d'origine et la taille du noyau de dérivation. Puisque l'image originale a été construite de toute pièce, on connaît parfaitement la parabole optimale et théorique que l'on devrait trouver *via* l'ajustement. La figure 4.8 donne l'erreur commise entre les paraboles ajustées et l'objectif théorique. L'erreur est la somme sur toutes les colonnes de l'image des écarts (en nombre de pixels) entre le point de la parabole ajustée et le point de la parabole théorique. Notons que pour chaque couple (intensité du bruit, taille du noyau) le test a été lancé 10 fois pour acquérir une certaine fiabilité du test vis à vis du comportement aléatoire du bruit. Les résultats présentés sont la moyenne de ces 10 exécutions.

On constate que l'erreur est minimale sur toute la partie gauche de l'illustration 4.8. Cette zone correspond à des intensités de bruit particulièrement faibles. Par conséquent, et sans surprise, l'ajustement fonctionne parfaitement bien. Cependant, il est plus intéressant d'étudier le comportement de l'ajustement (et par là même de notre estimateur de dérivées) pour des bruits plus intenses. On observe ainsi pour des bruits gaussiens d'écart type supérieur à 20 qu'il existe une zone de convergence optimale. Cette zone correspond (et vérifie) la relation 4.9 du théorème 4.3.1 liant la taille du noyau et l'intensité du bruit.

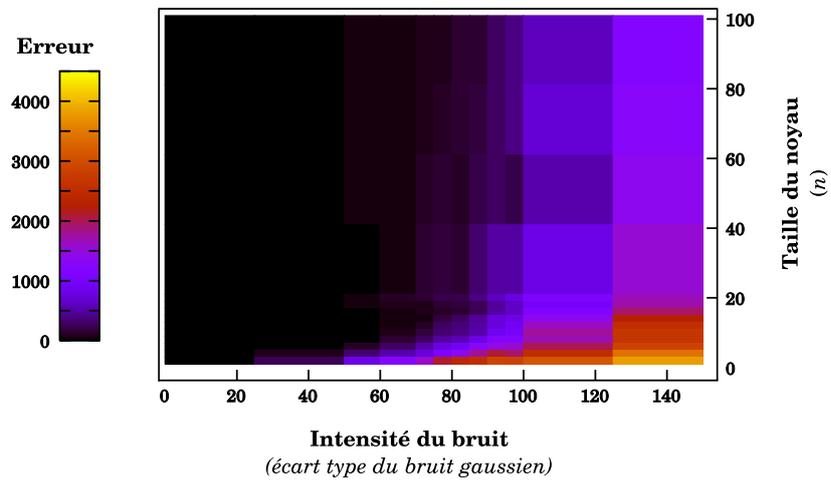


Fig. 4.8: Qualité de l'ajustement du contour parabolique.

Chapitre 5

Cas des courbes paramétrées

5.1 Espace discret, connexité

Avant d'étudier notre estimateur de dérivées pour les courbes paramétrées, commençons par voir quelques définitions préliminaires.

Définition 5.1.1 (Espace discret)

Soit p un entier naturel strictement plus grand que 1. On appelle \mathbb{Z}^p l'espace discret de dimension p .

Par la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas $p = 2$.

Définition 5.1.2 (Pixel)

Les éléments de \mathbb{Z}^2 sont appelés indifféremment *pixels* ou *points*. Il est d'usage de les représenter par de petits carrés centrés sur les éléments de \mathbb{Z}^2 comme cela est illustré par la figure 5.1.

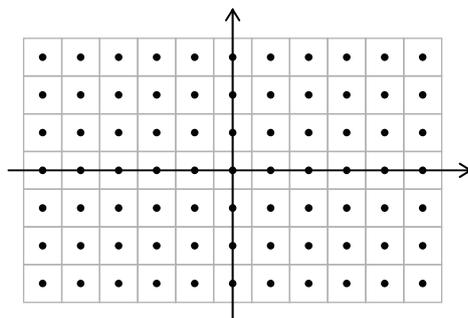


Fig. 5.1: Représentation courante de l'espace discret \mathbb{Z}^2 .

Définition 5.1.3 (Voisinage)

Soient $P \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle voisinage de P , noté $V(P)$, un ensemble de points $\{P_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $P \in V(P_i)$. On dit alors que les points P_i et P sont voisins.

Définition 5.1.4 (Voisinage k -connexe)

Il existe deux voisinages particulièrement intéressants pour \mathbb{Z}^2 . Il s'agit des voisinages 4-

connexe (noté V_4) et 8-connexe (noté V_8). Pour un point $P = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$, ils sont définis de la manière suivante :

$$V_4(P) = \{Q = (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x - a| + |y - b| \leq 1\} \setminus P \quad (5.1)$$

$$V_8(P) = \{Q = (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x - a| \leq 1 \text{ et } |y - b| \leq 1\} \setminus P \quad (5.2)$$

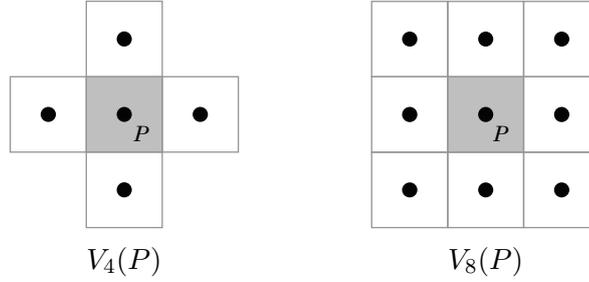


Fig. 5.2: Deux types de voisinage dans \mathbb{Z}^2 .

Définition 5.1.5 (Chemin k -connexe)

Une suite de points (x_1, \dots, x_n) est un *chemin k -connexe* si pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, x_i et x_{i+1} sont k -voisins.

Définition 5.1.6 (Chemin k -connexe croissant)

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un chemin k -connexe. Le chemin X est dit *croissant* si pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, $x_{i+1} = x_i$ ou $x_{i+1} = x_i + 1$ et si $y_{i+1} = y_i$ ou $y_{i+1} = y_i + 1$.

La figure 5.3 donne deux exemples de chemins k -connexes (qui, remarquons le, ne sont pas croissants).

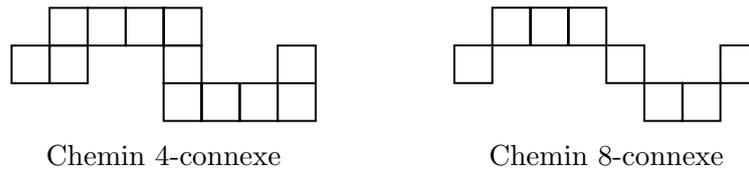


Fig. 5.3: Exemples de chemins k -connexes.

Remarque 5.1.1

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un chemin k -connexe croissant. Alors :

$$\|x_n - x_1\|_1 = n - 1 \quad (5.3)$$

Définition 5.1.7 (Ensemble k -connexe)

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ est dit *k -connexe* si et seulement si il existe un chemin k -connexe incluse dans E reliant tout couple de points $(a, b) \in E^2$.

Inversement, si il existe un couple $(a, b) \in E^2$ tel qu'aucun chemin k -connexe de E ne relie a à b , alors l'ensemble E est dit *déconnecté* (selon la k -connexité).

5.2 Droites arithmétiques

Les droites arithmétiques sont aux espaces discrets ce que les droites réelles sont aux espaces continus. Dans la mesure où les droites arithmétiques nous permettront d'aborder les estimateurs de tangentes issus de la géométrie discrète, allons plus en avant dans leur définition.

Définition 5.2.1 (Droite arithmétique ([15], [5]))

Soient $V = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+$. La droite arithmétique $\mathcal{D}_{V,\mu,\omega}$ de vecteur normal V , de décalage μ et d'épaisseur arithmétique ω est le sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 défini par :

$$\mathcal{D}_{V,\mu,\omega} = \{X = (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq ax + by + \mu < \omega\} \quad (5.4)$$

Géométriquement, la droite arithmétique de vecteur normal V , de décalage μ et d'épaisseur arithmétique ω est l'ensemble de points de \mathbb{Z}^2 compris entre les droites d'équations $ax + by + \mu = 0$ et $ax + by + \mu = \omega$ comme l'illustre la figure 5.4

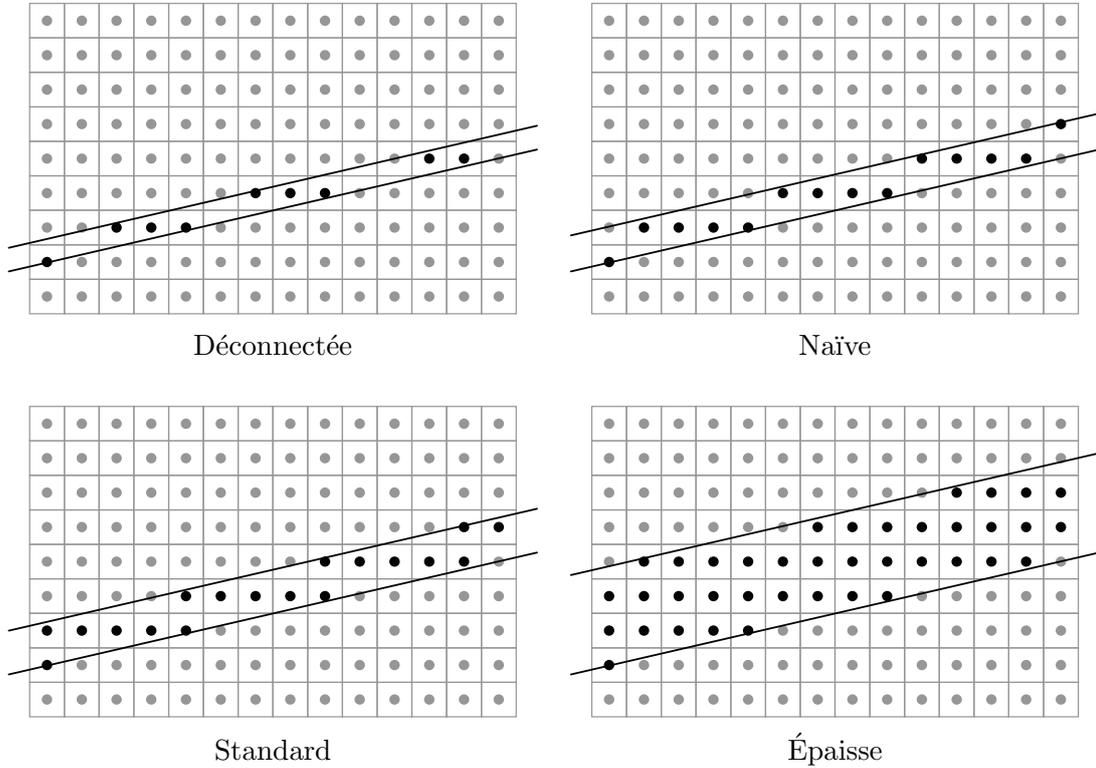


Fig. 5.4: Exemples de droites arithmétiques.

Définition 5.2.2

En utilisant les même notations qu'à la définition 5.2.1, on dit que $\mathcal{D}_{V,\mu,\omega}$ est une droite :

- *naïve* si $\omega = \|V\|_\infty$;
- *standard* si $\omega = \|V\|_1$;
- *épaisse* si $\omega > \|V\|_1$;

Propriété 5.2.1

Les travaux de Jean-Pierre Reveillès dans [15] donnent les propriétés suivantes :

- la droite naïve $\mathcal{D}_{V,\mu,\|V\|_\infty}$ est la droite arithmétique 4-connexe la plus fine possible ;
- autrement dit, pour tout ω tel que $0 \leq \omega < \|V\|_\infty$, la droite $\mathcal{D}_{V,\mu,\omega}$ est déconnectée ;
- la droite standard $\mathcal{D}_{V,\mu,\|V\|_1}$ est la droite arithmétique 8-connexe la plus fine possible.

5.3 Courbes paramétrées et discrétisation

Notation 5.3.1

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction paramétrée :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_x(t) \\ \phi_y(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.5}$$

On appelle *composantes* de ϕ les fonctions $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sauf cas particulier, on utilisera toujours les indices x et y pour désigner les composantes d'une fonction paramétrée.

Voyons maintenant ce qu'est la discrétisation d'une fonction paramétrée ainsi que quelques unes des propriétés qui lui sont associées.

Définition 5.3.1 (Fonction paramétrée discrète)

Une fonction paramétrée discrète est une fonction définie sur un sous-ensemble de \mathbb{Z} et qui prend ses valeurs dans un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 . La représentation graphique d'une telle fonction, appelée *courbe paramétrée discrète*, est un ensemble de points de \mathbb{Z}^2 .

Définition 5.3.2 (Discrétisation)

Soit $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction paramétrée. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ le pas de discrétisation, c'est à dire la largeur d'un pixel par rapport à la courbe de ϕ . Soit $q \in \mathbb{N}$. On appelle *discrétisation* de ϕ toute fonction $\Gamma : \{0, \dots, q\} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ telle que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ fixé, les deux équations suivantes soient vérifiées :

$$\forall a \in \{0, \dots, q\}, \exists t \in I, \|h\Gamma(a) - \phi(t)\|_2 \leq \varepsilon \tag{5.6}$$

$$\forall t \in I, \exists a \in \{0, \dots, q\}, \|h\Gamma(a) - \phi(t)\|_2 \leq \varepsilon \tag{5.7}$$

En quelque sorte, la valeur ε est similaire à l'épaisseur arithmétique d'une droite discrète dans la mesure où ε détermine l'épaisseur de la discrétisation.

Définition 5.3.3 (Discrétisation k -connexe)

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et soit $\Gamma : \{0, \dots, q\} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ sa discrétisation. On dit que Γ est une *discrétisation k -connexe* de ϕ si l'ensemble de points $\{\Gamma(i) \mid i \in \{0, \dots, q\}\}$ est un ensemble k -connexe.

Par la suite, on ne considérera que les discrétisations 4-connexes. Sauf exception, on omettra donc de préciser que les discrétisations sont 4-connexes.

Propriété 5.3.1

En reprenant les notations de la définition 5.3.2 avec ϕ une fonction continue et si l'on prend $\varepsilon \geq h \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors la discrétisation Γ de ϕ est 4-connexe.

La propriété 5.3.1 est illustrée à la figure 5.5 où le rayon des grands cercles est égal à $h\frac{\sqrt{2}}{2}$. La valeur $h\frac{\sqrt{2}}{2}$ correspond à la longueur de la demi-diagonale d'un pixel.

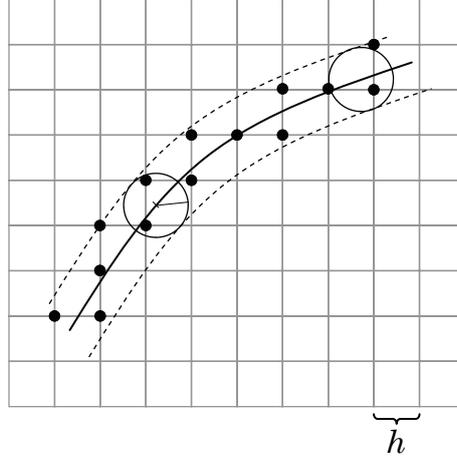


Fig. 5.5: Interprétation de la dérivée comme pente de la tangente.

5.4 Géométrie discrète et estimateurs de tangentes

Lorsque nous avons parlé des différentes méthodes pour estimer des dérivées discrètes, nous avons évoqué les méthodes issues de la géométrie discrète. Comme nous l'avons dit, ces méthodes sont principalement employées pour estimer les tangentes d'objets numériques. Toutefois, il est possible d'en extraire d'autres notions telles que la longueur de courbe ou encore la courbure. À présent, faisons un rapide tour d'horizon de ces méthodes.

Notons qu'à travers son organisation et ses notations, cette partie est partiellement inspirée de [4].

Soit C une courbe discrète 4-connexe¹ et soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C : \{0, \dots, n\} &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ i &\longmapsto C(i) = C_i \end{aligned} \quad (5.8)$$

Par commodité, on note $C_{i,j}$ l'ensemble de points consécutifs $\{C_i, \dots, C_j\}$ de la courbe C pour $0 \leq i < j \leq n$.

La notion de segments arithmétiques et de segments maximaux sont fondamentales. En effet, l'estimation de tangentes en géométrie discrète repose principalement sur ces outils.

Définition 5.4.1 (Segment arithmétique)

Un ensemble de points consécutifs $C_{i,j}$ de la courbe C est appelé *segment arithmétique* si et seulement si il existe une droite standard $\mathcal{D}_{V,\mu,\|V\|_1}$ contenant tous les points C_k pour $k \in \{i, \dots, j\}$.

¹Il est aussi possible d'adapter les définitions et méthodes pour la 8-connexité en préférant, entre autres, les droites arithmétiques naïves aux droites standards.

Définition 5.4.2

En association avec la définition 5.4.1, on introduit le prédicat S décidant si un ensemble de points consécutifs $C_{i,j}$ de la courbe C est un segment arithmétique :

$$S : \quad \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \{\text{vrai, faux}\}$$

$$(i, j) \longmapsto \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } C_{i,j} \text{ est un segment arithmétique} \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.9)$$

Définition 5.4.3

Le premier index $j \geq i$ tel que $C_{i,j}$ soit un segment maximal et $C_{i,j+1}$ ne le soit pas est appelé *tête* de i . On la note $F(i)$.

De manière symétrique, le premier index $i \leq j$ tel que $C_{i,j}$ soit un segment maximal et $C_{i-1,j}$ ne le soit pas est appelé *queue* de j . On la note $B(j)$.

Définition 5.4.4 (Segment maximal)

Un ensemble de points consécutifs $C_{i,j}$ de la courbe C est appelé *segment arithmétique maximal* si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $S(i, j) \wedge \neg S(i, j + 1) \wedge \neg S(i - 1, j)$
2. $B(j) = i \wedge F(i) = j$
3. $\exists k, i = B(k) \wedge j = F(B(k))$
4. $\exists k', j = F(k') \wedge i = B(F(k'))$

Remarque 5.4.1

Pour un point C_k de la courbe C , plusieurs segments arithmétiques contenant C_k peuvent exister. De même, il peut y avoir plusieurs segments maximaux contenant C_k .

Le principe général de l'estimation de la tangente en un point C_k de la courbe C consiste à prendre un segment arithmétique $C_{i,j}$ de C tel que $i \leq k \leq j$. La tangente au point C_k est alors la droite arithmétique standard contenant $C_{i,j}$. L'énoncé du principe est trop général. En effet, ainsi décrite, et d'après la remarque précédente, la tangente n'est pas définie de manière unique.

Il existe différentes méthodes décrivant de manière plus précise le segment arithmétique à considérer. Nous en présentons ici quelques unes parmi les plus courantes.

Tangente symétrique en C_k (ST) Cette méthode prend pour segment arithmétique de base le segment $C_{k-l, k+l}$ tel que $S(k-l, k+l)$ et $\neg S(k-l-1, k+l+1)$.

Tangente de Feschet-Tougne en C_k (FTT) La tangente de Feschet-Tougne prend pour segment arithmétique de base le segment maximal avec les plus grands indices qui contient le segment de base pour la tangente symétrique en C_k .

La tangente médiane aux demi-tangentes en C_k (HT) Ici on commence par considérer la demi-tangente avant $C_{k, F(k)}$ et la demi-tangente arrière $C_{B(k), k}$. Si V^- est le vecteur normal de la droite arithmétique standard contenant la demi-tangente arrière et si V^+ est le vecteur normal pour la demi-tangente avant alors la tangente finale est la droite arithmétique de vecteur normal $\frac{1}{2}(V^- + V^+)$ contenant le point C_k .

L'estimateur de tangente λ -MST Introduit par Jacques-Olivier Lachaud, Anne Vialard et François de Vieilleville dans [4], l'estimateur λ -MST est actuellement un des meilleurs estimateurs de tangentes issus de la géométrie discrète. En effet, cet estimateur tente de regrouper à lui seul les meilleures propriétés des autres estimateurs.

5.5 Abscisse et paramétrisation pixiligne

5.5.1 Définition du problème

Soit ϕ une fonction paramétrée de classe C^3 , simple (sans autointersection) et fermée :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_x(t) \\ \phi_y(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Soit $\Gamma : 0, \dots, k \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ la discrétisation de ϕ de pas de discrétisation $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Le premier problème se posant avec les courbes paramétrées consiste à mettre en relation la numérotation des pixels de la discrétisation Γ et la paramétrisation de la fonction continue ϕ . En effet, pour une paramétrisation quelconque de ϕ , la relation suivante n'est obligatoirement vérifiée :

$$\|h\Gamma(a) - \phi(ha)\| \leq Kh^\alpha \quad \text{pour } a \in \{0, \dots, k\} \quad (5.11)$$

On cherche donc une reparamétrisation $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de ϕ telle que :

$$\|h\Gamma(a) - \gamma(ha)\| \leq Kh^\alpha \quad \text{pour } a \in \{0, \dots, k\} \quad (5.12)$$

5.5.2 Résolution du problème

Ce problème est résolu en introduisant une nouvelle notion, l'*abscisse pixiligne*. Cette approche est similaire à l'*abscisse curviligne* à la différence qu'on utilise la norme 1 au lieu de la norme euclidienne. Ainsi, on définit la fonction longueur $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longmapsto \int_a^u \|\phi'(t)\|_1 dt \end{aligned} \quad (5.13)$$

Pour $u \in [a, b]$, la quantité $L(u)$ représente la longueur, selon la norme 1, de l'arc de courbe compris entre $\phi(a)$ et $\phi(u)$. Si la courbe ϕ n'a ni de retour arrière ni de point stationnaire, alors la fonction L est une bijection strictement croissante.

La reparamétrisation *pixiligne* γ de ϕ est alors la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \gamma : [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \phi(L^{-1}(t)) = \begin{pmatrix} \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x(L^{-1}(t)) \\ \phi_y(L^{-1}(t)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

où $c = L(a)$ et $d = L(b)$.

Propriété 5.5.1

Au sens de la norme 1, la reparamétrisation γ est normale. Autrement dit, pour tout $t \in [c, d]$:

$$\|\gamma'(t)\|_1 = 1 \quad (5.15)$$

Preuve

Puisque $L(u) = \int_a^u \|\phi'(t)\|_1 dt$, on peut déjà dire que $L'(u) = \|\phi'(u)\|_1$.

Par définition $\gamma(t) = \phi(L^{-1}(t))$ ce qui revient à dire que $\gamma(L(t)) = \phi(t)$. En dérivant cette dernière égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} & \gamma'(L(t)) L'(t) = \phi'(t) \\ \Leftrightarrow & \gamma'(L(t)) \|\phi'(t)\|_1 = \phi'(t) \\ \Leftrightarrow & \gamma'(L(t)) = \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|_1} \\ \Leftrightarrow & \gamma'(u) = \frac{\phi'(L^{-1}(u))}{\|\phi'(L^{-1}(u))\|_1} \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que $\|\gamma'(u)\|_1 = 1$. □

Remarque 5.5.1

Dans la mesure où ϕ est C^3 avec $\phi^{(3)}$ bornée, le nombre de tangentes horizontales ou verticales est finies. Cette remarque est aussi valable pour γ , en tant que reparamétrisation de ϕ . Soit $\{t_0, \dots, t_{l-1}\}$ l'ensemble des paramètres tels que $\gamma'_x(t_i) = 0$ ou $\gamma'_y(t_i)$ pour $i \in \{0, \dots, l-1\}$.

Propriété 5.5.2

Soit $j \in \{0, \dots, l-2\}$ et soient u et u' tels que $t_j \leq u \leq u' \leq t_{j+1}$. Nous avons alors que :

$$\left\| \int_u^{u'} \gamma'(t) dt \right\|_1 = \int_u^{u'} \|\gamma'(t)\|_1 dt \tag{5.16}$$

Preuve

Soient x_1, x_2, y_1 et y_2 des nombres réels. Si x_1 et x_2 sont de même signe et si y_1 et y_2 le sont aussi alors :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\|_1 + \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 \tag{5.17}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 \\ &= |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \\ &= |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| \\ &= |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\|_1 + \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 \end{aligned}$$

La propriété 5.5.2 vient alors en prenant la limite de la somme de Riemann et en remarquant que pour tout $v \in [u, u']$, $\gamma'_x(u)$ et $\gamma'_x(v)$ sont de même signe et que $\gamma'_y(u)$ et $\gamma'_y(v')$ le sont

aussi :

$$\begin{aligned} \left\| \int_u^{u'} \gamma'(t) dt \right\|_1 &= \left\| \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\gamma \left(u + (i+1) \frac{u'-u}{N} \right) - \gamma \left(u + i \frac{u'-u}{N} \right) \right) \right\|_1 \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \gamma \left(u + (i+1) \frac{u'-u}{N} \right) - \gamma \left(u + i \frac{u'-u}{N} \right) \right\|_1 \\ &= \int_u^{u'} \|\gamma'(t)\|_1 dt \end{aligned}$$

□

Propriété 5.5.3

Si $t_i \leq u \leq t_{i+1}$, alors :

$$\|\gamma(u) - \gamma(t_j)\|_1 = u - t_j \tag{5.18}$$

Preuve

En utilisant les propriétés 5.5.2 et 5.5.1, on peut écrire que :

$$\|\gamma(u) - \gamma(t_j)\|_1 = \left\| \int_{t_j}^u \gamma'(t) dt \right\|_1 = \int_{t_j}^u \|\gamma'(t)\|_1 dt = \int_{t_j}^u dt = u - t_j$$

□

Passons maintenant au théorème fondamental concernant la reparamétrisation pixiligne.

Théorème 5.5.1

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $\phi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction ne possédant ni autointersection, ni retour arrière, ni point stationnaire. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\Gamma : 0, \dots, k \rightarrow \mathbb{Z}^2$ la discrétisation de la courbe ϕ pour le pas de discrétisation $h \in \mathbb{R}_+^*$. Enfin, soit γ la reparamétrisation pixiligne de ϕ . Alors, la relation suivante est vraie pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$:

$$\|h\Gamma(i) - \gamma(hi)\|_2 \leq h \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{5.19}$$

En d'autres termes, le théorème 5.5.1 stipule qu'il y a correspondance entre la numérotation des pixels de Γ et la paramétrisation de γ .

Preuve

Le principe général de la preuve consiste à prendre deux points entiers de la discrétisation et deux points réels de la reparamétrisation correspondants aux points entiers. On montre ensuite que les paramètres des points de la courbe continue sont en correspondance avec la numérotation des pixels de la discrétisation.

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction cyclique et simple et soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la reparamétrisation pixiligne de ϕ . Supposons, sans perte de généralité, qu'un cycle de γ soit entièrement décrit pour le paramètre $t \in [0, 1]$. Soit $l \in \mathbb{N}$ et soient $t_0 \leq \dots \leq t_{l-1}$ les paramètres tels que $\gamma'_x(t_i) = 0$ ou $\gamma'_y(t_i) = 0$. Soit $T \in \mathbb{R}$ telle que la fonction :

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \tau(t) = \gamma(t + T) \end{aligned} \tag{5.20}$$

ait les propriétés suivantes :

$$\forall t \in [t_0 + T, t_1 + T], \begin{cases} \tau'_x(t) \geq 0 \\ \tau'_y(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$t_0 + T = 0$$

τ est en fait un changement de variable dans γ tel que les composantes de τ soient croissantes sur $[0, t_1 + T]$. On appelle T_0, \dots, T_{l-1} les paramètres $t_0 + T, \dots, t_{l-1} + T$.

Soit $\Gamma : \{0, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ la discrétisation de ϕ avec $h > 0$ pour pas de discrétisation. Supposons, toujours sans perte de généralité, que $\Gamma(0)$ corresponde au point de τ de paramètre $T_0 = 0$. On a donc que :

$$|h\Gamma_x(0) - \tau_x(0)| \leq \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad |h\Gamma_y(0) - \tau_y(0)| \leq \frac{h}{2} \quad (5.21)$$

Soit $A \in \{0, \dots, k\}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, A\}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_x(i) &= \Gamma_x(i-1) \text{ ou } \Gamma_x(i-1) + 1 \\ \Gamma_y(i) &= \Gamma_y(i-1) \text{ ou } \Gamma_y(i-1) + 1 \end{aligned}$$

Soit $a \in [T_0, T_1]$ tel que :

$$\begin{aligned} |h\Gamma_x(A) - \tau_x(a)| &\leq \frac{h}{2} \\ |h\Gamma_y(A) - \tau_y(a)| &\leq \frac{h}{2} \end{aligned}$$

En sommant les inégalités concernant la première composante (le cas de la deuxième composante est en tout point similaire), on obtient :

$$\begin{aligned} |h\Gamma_x(0) - \tau_x(0)| + |h\Gamma_x(A) - \tau_x(a)| &\leq h \\ \Leftrightarrow |h\Gamma_x(0) - \tau_x(0)| + |\tau_x(a) - h\Gamma_x(A)| &\leq h \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} |h\Gamma_x(0) - h\Gamma_x(A) + \tau_x(a) - \tau_x(0)| &\leq h \\ \Leftrightarrow |\tau_x(a) - \tau_x(0) - h(\Gamma_x(A) - \Gamma_x(0))| &\leq h \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient :

$$|\tau_y(a) - \tau_y(0) - h(\Gamma_y(A) - \Gamma_y(0))| \leq h$$

On effectue alors le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} &|\tau_x(a) - \tau_x(0) + \tau_y(a) - \tau_y(0) - h(\Gamma_x(A) - \Gamma_x(0) + \Gamma_y(A) - \Gamma_y(0))| \leq 2h \\ \Rightarrow &|\tau_x(a) - \tau_x(0) + \tau_y(a) - \tau_y(0)| - h|\Gamma_x(A) - \Gamma_x(0) + \Gamma_y(A) - \Gamma_y(0)| \leq 2h \\ \Rightarrow &|\|\tau(a) - \tau(0)\|_1 - h\|\Gamma(A) - \Gamma(0)\|_1| \leq 2h \end{aligned}$$

En utilisant, la propriété 5.5.3 et la remarque 5.1.1, on conclut que :

$$|a - hA| \leq 2h$$

Autrement dit, le paramètre (a) du point de la courbe réelle est très proche du numéro du pixel (A) de la discrétisation (multiplié par le pas de discrétisation h). Ainsi, pour tout i tel que $hi \in [T_0, T_1]$, on obtient la relation du théorème 5.5.1 :

$$\|h\Gamma(i) - \tau(hi)\|_2 \leq h \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5.22)$$

Puisque τ n'est qu'un changement de variable dans γ , la relation précédente est aussi valable pour γ . En ce qui concerne les autres intervalles $[T_i, T_{i+1}]$ pour $i \in \{1, \dots, l-2\}$, il suffit de faire un changement de variable différent pour la fonction τ . \square

Le théorème suivant donne un résultat important pour la suite à propos de la classe de continuité de la reparamétrisation pixiligne d'une fonction.

Théorème 5.5.2

Soit γ la reparamétrisation pixiligne de ϕ . Soient t_0, \dots, t_{l-1} les paramètres pour lesquels la courbe de la fonction ϕ admet une tangente verticale ou horizontale (c'est à dire que $\phi'_x(t_i) = 0$ ou $\phi'_y(t_i) = 0$ pour $i \in \{0, \dots, l-1\}$). Alors la reparamétrisation pixiligne γ est C^3 sur les intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ (pour $i \in \{1, \dots, l-2\}$) et elle est C^1 en t_i (pour $i \in \{1, \dots, l-1\}$).

Preuve

Soit $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par :

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \|\phi'(t)\|_1 \end{aligned} \quad (5.23)$$

La fonction N est continue mais pas dérivable. En effet la représentation de N possède des points angulaires lorsque une des composantes de ϕ' change de signe (et cela à cause des valeurs absolues issues de la norme 1). Entre ces points particuliers, où N est C^0 , la fonction N est C^2 en tant que dérivée de fonctions C^3 . Puisque, par définition, on a que :

$$\gamma(u) = \int_a^u N(t)dt \quad (5.24)$$

on en déduit que la reparamétrisation pixiligne γ est, de manière générale, C^1 et plus précisément C^3 par morceaux. \square

5.5.3 Remarque pratique

La reparamétrisation pixiligne a surtout un intérêt théorique. En effet, il est difficile de mettre en pratique cette notion puisque celle-ci requiert, entre autres, le calcul d'intégrales. À moins de connaître l'expression analytique de la reparamétrisation (qui n'est d'ailleurs pas toujours facile à déterminer), on est obligé d'utiliser des méthodes numériques pour résoudre les intégrales. Il en est de même pour l'inversion de la fonction longueur L . Le cumul d'erreurs ainsi obtenu empêche d'écrire un algorithme fiable calculant la reparamétrisation pixiligne.

5.5.4 Illustration

Bien que les notions d'abscisses et de reparamétrisation pixiligne soient difficile à mettre en œuvre dans le cas général, il est possible de l'utiliser pour des exemples relativement simples. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Soit ϕ la fonction continue servant de base à notre étude :

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \phi_x(t) \\ \phi_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t^p) \\ \sin(2\pi t^p) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

La dérivée de ϕ est :

$$\begin{aligned} \phi' : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} -2p\pi t^{p-1} \sin(2\pi t^p) \\ 2p\pi t^{p-1} \cos(2\pi t^p) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.26)$$

On en déduit la « vitesse de la paramétrisation » (selon la norme 1) pour la paramétrisation initiale en fonction de $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|\phi'(t)\|_1 &= |-2p\pi t^{p-1} \sin(2\pi t^p)| + |2p\pi t^{p-1} \cos(2\pi t^p)| \\ &= \begin{cases} 2p\pi t^{p-1} \sin(2\pi t^p) + 2p\pi t^{p-1} \cos(2\pi t^p) & \text{si } t \in \left[0, \sqrt[p]{\frac{1}{4}}\right[\\ 2p\pi t^{p-1} \sin(2\pi t^p) - 2p\pi t^{p-1} \cos(2\pi t^p) & \text{si } t \in \left[\sqrt[p]{\frac{1}{4}}, \sqrt[p]{\frac{1}{2}}\right[\\ -2p\pi t^{p-1} \sin(2\pi t^p) - 2p\pi t^{p-1} \cos(2\pi t^p) & \text{si } t \in \left[\sqrt[p]{\frac{1}{2}}, \sqrt[p]{\frac{3}{4}}\right[\\ -2p\pi t^{p-1} \sin(2\pi t^p) + 2p\pi t^{p-1} \cos(2\pi t^p) & \text{si } t \in \left[\sqrt[p]{\frac{3}{4}}, 1\right[\end{cases} \end{aligned}$$

La figure 5.6 illustre cette vitesse de paramétrisation c'est à dire la norme 1 du vecteur tangent en fonction du paramètre $t \in [0, 1]$. On remarque sur cette figure la présence des points angulaires qui empêche la reparamétrisation pixiligne d'être partout C^3 .

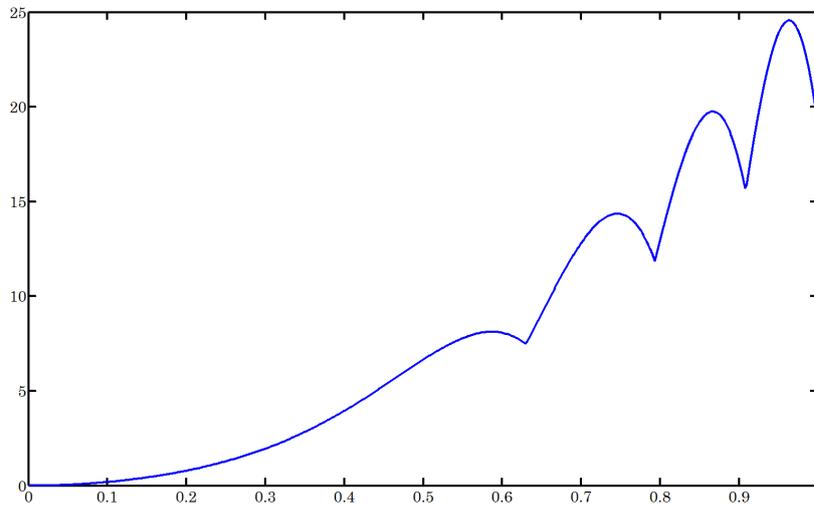


Fig. 5.6: Vitesse de la paramétrisation initiale.

On calcule ensuite la longueur, toujours selon la norme 1, de l'arc de courbe compris entre 0 et u en intégrant l'expression précédente de $\|\phi'(t)\|_1$. Sans s'attarder sur le détail du calcul de la primitive, rappelons tout de même que pour $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u \in [0, 1]$:

$$\int_0^u f(t)dt = \int_0^{\sqrt[p]{\frac{1}{4}}} f(t)dt + \int_{\sqrt[p]{\frac{1}{4}}}^{\sqrt[p]{\frac{1}{2}}} f(t)dt + \int_{\sqrt[p]{\frac{1}{2}}}^{\sqrt[p]{\frac{3}{4}}} f(t)dt + \int_{\sqrt[p]{\frac{3}{4}}}^u f(t)dt$$

On obtient ainsi la fonction longueur :

$$L: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$u \longmapsto \begin{cases} \sin(2\pi u^p) - \cos(2\pi u^p) + 1 & \text{si } u \in \left[0, \sqrt[p]{\frac{1}{4}}\left[\right. \right. \\ -\sin(2\pi u^p) - \cos(2\pi u^p) + 3 & \text{si } u \in \left[\sqrt[p]{\frac{1}{4}}, \sqrt[p]{\frac{1}{2}}\left[\right. \right. \\ -\sin(2\pi u^p) + \cos(2\pi u^p) + 5 & \text{si } u \in \left[\sqrt[p]{\frac{1}{2}}, \sqrt[p]{\frac{3}{4}}\left[\right. \right. \\ \sin(2\pi u^p) + \cos(2\pi u^p) + 7 & \text{si } u \in \left[\sqrt[p]{\frac{3}{4}}, 1\left[\right. \right. \end{cases}$$

Finalement, la reparamétrisation pixiligne :

$$\gamma: L([0, 1]) = [0, 8] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \phi_x(L^{-1}(t)) \\ \phi_y(L^{-1}(t)) \end{pmatrix}$$

Étant donnée l'expression relativement compliquée de la fonction L , son inverse L^{-1} est déterminée, pour cet exemple, numériquement et non analytiquement.

La figure 5.7 illustre l'utilisation de la reparamétrisation pixiligne. On constate qu'en utilisant la formule de discrétisation sur la fonction originale ϕ la discrétisation n'a aucune propriété intéressante (en rouge sur la figure) alors qu'avec la reparamétrisation pixiligne, le processus de discrétisation produit une courbe paramétrée 4-connexe (représentée en bleu).

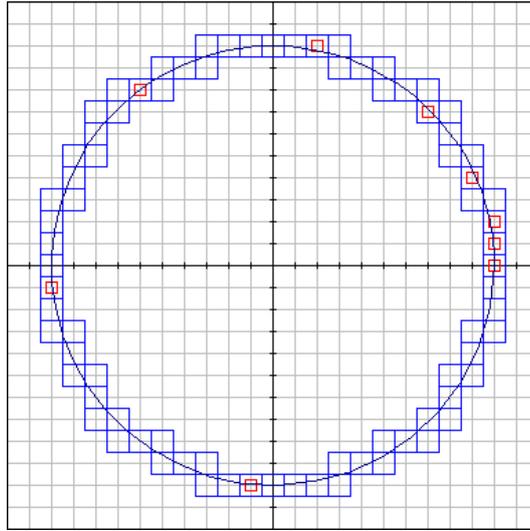


Fig. 5.7: Illustration de la reparamétrisation pixiligne.

5.6 Estimation de dérivées

Maintenant que nous avons réussi à mettre en correspondance la paramétrisation d'une courbe paramétrée avec la numérotation des pixels de la discrétisation lui correspondant, on souhaite pouvoir estimer les dérivées de courbes discrètes.

Partant d'une fonction paramétrée discrète $\Gamma: \{0, \dots, q\} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ de composantes Γ_x et Γ_y (toutes deux de $\{0, \dots, q\}$ dans \mathbb{Z}), on estime la dérivée de la manière suivante :

$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma_x \\ \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma_y \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

En considérant que Γ est la discrétisation d'une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, on cherche à estimer la vitesse de convergence de notre estimateur. Puisque la paramétrisation de ϕ est quelconque, on ne peut pas mettre directement en relation les fonctions ϕ et Γ avec la formule classique. On met donc en relation la fonction discrète Γ avec la reparamétrisation pixiligne γ de ϕ et, par conséquent, estimer la convergence de la dérivée discrète vers la dérivée γ' de γ . Cette approche est fondée puisque pour une courbe paramétrée discrète, la vitesse de la paramétrisation n'est pas vraiment significative (tout du moins pas au sens que l'on entend pour une courbe paramétrée continue). On s'intéresse donc plus à l'orientation du vecteur tangent qu'à sa norme. Or la reparamétrisation pixiligne conserve cette orientation.

L'approche naturelle pour estimer la vitesse de convergence serait d'appliquer le théorème pour les fonctions réelles (théorème 3.4.1) aux composantes des fonctions paramétrées. Cependant, le théorème 3.4.1 nécessiterait que les composantes γ_x et γ_y de la fonction paramétrée continue soient de classe C^3 . Or, comme nous l'avons vu précédemment, la reparamétrisation pixiligne d'une fonction (même C^3) n'est pas de classe C^3 ; elle est seulement C^3 par morceaux.

Malgré cette difficulté théorique, il est possible de donner quelques résultats pour l'estimateur de dérivées dans le cas des courbes paramétrées.

Théorème 5.6.1

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^3 telle que $\phi^{(3)}$ soit bornée.

Soit γ la reparamétrisation pixiligne de ϕ (γ est donc C^3 par morceaux).

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ le pas de discrétisation.

Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\Gamma : \{0, \dots, q\} \rightarrow \mathbb{R}$ une discrétisation (éventuellement bruitée) de ϕ telle que pour tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$\|h\Gamma(a) - \gamma(ha)\| \leq Kh^\alpha \tag{5.28}$$

Soient t_1, \dots, t_l les paramètres correspondants aux points où γ n'est que C^1 (c'est à dire au niveau des tangentes verticales et horizontales).

Enfin, soient i_1, \dots, i_l les numéros des pixels de la discrétisation correspondants aux points $\gamma(t_j)$ pour $j \in \{1, \dots, l\}$.

Si :

$$n = \left\lfloor h^{\frac{2(\alpha-3)}{3}} \right\rfloor \tag{5.29}$$

et si $a \in \{0, \dots, q\}$ est tel que $t_i + \varepsilon < ha < t_{i+1} - \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ fixé et $i \in \{1, \dots, l-1\}$.

Alors il existe une fonction $\sigma_{\gamma,\alpha} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma_{\gamma,\alpha}(h) \in \mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}\alpha})$ lorsque $h \rightarrow 0$ telle que :

$$\left\| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(a) - \gamma'(ha) \right\| \leq \sigma_{\phi,\alpha}(h) \tag{5.30}$$

En d'autres termes, le théorème 5.6.1 stipule qu'il y a convergence si l'on est pas trop proches des tangentes verticales ou horizontales.

Preuve

La restriction de la fonction γ à l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, notée $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$, est une fonction C^3 . On peut donc appliquer sans aucun problème le théorème de convergence 3.4.1 du cas des fonctions réelles. On obtient ainsi le résultat attendu. □

Remarque 5.6.1

Si la fonction ϕ est strictement monotone, alors le résultat de convergence s'applique à tout le

domaine de définition de la fonction. En effet, une fonction strictement monotone ne possède ni tangentes verticales ni tangentes horizontales.

Intuitivement, il n'y a aucune raison à ce que notre estimateur de dérivées fonctionne moins bien au niveau des tangentes verticales et horizontales. En effet, le calcul du produit de convolution est indépendant de l'endroit auquel il est calculé. Il semblerait donc qu'il soit possible de construire une preuve de la convergence en tout point de l'estimateur de dérivées pour les fonctions paramétrées. Cela est d'autant plus vrai, que les expérimentations menées confirment l'idée intuitive que l'estimateur de dérivée est correct partout.

Plusieurs approches ont donc été essayées pour construire une preuve de la convergence de l'estimateur permettant de s'affranchir des hypothèses contraignantes du théorème 3.4.1. Je présente ici deux de ces approches sans trop entrer dans le détail puisque les résultats ne sont pas parfaits.

Première approche La première solution permettant de passer outre les problèmes de la reparamétrisation pixiligne consiste à altérer légèrement la courbe continue initiale au niveau des tangentes verticales et horizontales de manière à obtenir une autre courbe mais qui est partout C^3 . Cette nouvelle courbe est construite en remarquant que la reparamétrisation initiale est lipschitzienne. Il est alors possible d'appliquer le théorème de convergence initial. Le problème de cette approche est que la courbe ainsi construite est légèrement différente de la courbe initiale. Par conséquent, on obtient une vitesse de convergence inférieure au niveau des altérations c'est à dire au niveau des tangentes verticales et horizontales. En l'occurrence, pour une hypothèse de bruit nul, on a une convergence en $h^{\frac{1}{3}}$ au lieu de $h^{\frac{2}{3}}$.

Deuxième approche La deuxième solution envisagée repose sur le produit de convolution de deux fonctions continues. Étant données deux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, leurs produits de convolution, noté $f * g$, est défini par :

$$\begin{aligned} f * g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \end{aligned} \quad (5.31)$$

L'idée consiste à convoluer la reparamétrisation pixiligne γ avec une gaussienne centrée d'écart type σ :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

On construit ainsi une fonction $\bar{\gamma}$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x-t)\mathcal{G}_\sigma(t)dt \end{aligned} \quad (5.33)$$

On peut montrer que la fonction $\bar{\gamma}$ converge vers la fonction γ lorsque $\sigma \rightarrow 0$. De plus, il est aussi possible de montrer que la fonction $\bar{\gamma}$ est de classe C^∞ . Ainsi, le théorème de convergence pourrait être appliqué à $\bar{\gamma}$. Toutefois, pour appliquer ce théorème, on utilise un écart type σ fixé. Aussi petit soit-il, ce paramètre σ n'est pas infiniment petit. Par conséquent, la fonction $\bar{\gamma}$ n'est pas égale à la fonction γ et donc les dérivées γ' et $\bar{\gamma}'$ ne sont pas non plus égales. Pour l'instant, nous n'avons trouvé aucune méthode permettant de majorer suffisamment finement cette variation ce qui nous empêche d'étudier la qualité de l'estimateur de dérivées.

Troisième approche Une autre approche a été proposée par Christian Mercat² lors de la présentation du problème aux Journées Informatique et Géométrie de Sophia Antipolis. Cette approche consiste à effectuer une rotation des courbes paramétrées (la courbe continue initiale et sa discrétisation). Ainsi, les tangentes verticales et horizontales d'origines seraient transformées en tangentes quelconques. Ainsi, on pourrait démontrer la convergence de l'estimateur de dérivées en ces points particuliers. Le problème de cette approche est que la discrétisation de la courbe continue transformée par une rotation n'est pas le même objet que la discrétisation de la courbe continue sans rotation. On ne peut donc pas conclure quant à la convergence de l'estimateur de dérivées.

Quatrième approche Une dernière approche a été proposée par Sébastien Fourey³. Cette approche consiste à construire une fonction qui serait proche de la fonction continue initiale. On comparerait alors l'estimation discrète de la tangente avec la dérivée de la fonction nouvellement construite. De la même manière que pour le principe de convolution avec une gaussienne, il faudrait être en mesure de quantifier finement l'écart entre la fonction nouvellement construite et la fonction initiale. Or cette majoration ne nous permet toujours pas de conclure quant à la convergence de l'estimateur de dérivées.

5.7 Expérimentations

Les difficultés rencontrées pour démontrer que notre estimateur de dérivées discrètes est convergent pour les fonctions paramétrées ne nous empêchent pas de mener quelques expérimentations. Cela est d'autant plus intéressant que les expériences suivantes tendent à montrer que notre estimateur de dérivées se comportent bien pour le cas des courbes paramétrées.

Comme nous l'avons déjà dit, l'orientation de la tangente à une courbe nous intéresse davantage que la norme de cette tangente. Commençons donc par définir ce qu'est l'angle d'une tangente.

Définition 5.7.1 (Angle d'une tangente)

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction paramétrée de composantes γ_x et γ_y . On définit la fonction « angle de la tangente », notée θ , par :

$$\begin{aligned} \theta : I &\longrightarrow [0, 2\pi[\\ t &\longmapsto \theta(t) \end{aligned} \tag{5.34}$$

où $\theta(t)$ est l'angle (en radian) compris entre 0 et 2π tel que :

$$\tan(\theta(t)) = \frac{\gamma'_y(t)}{\gamma'_x(t)} \tag{5.35}$$

L'angle de la tangente est donc l'angle que forme la tangente avec l'axe des abscisses comme cela est illustré à la figure 5.8.

²Institut Mathématiques et Modélisation, Montpellier.

³GREYC Image, Caen.

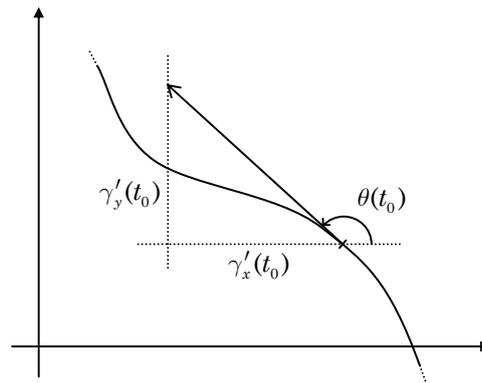


Fig. 5.8: Angle de la tangente en t_0 .

5.7.1 Vitesse de convergence

On s'intéresse dans un premier temps à la vitesse de convergence de l'estimateur de dérivées discrètes dans le cas des courbes paramétrées. L'exemple étudié est le cercle utilisé en illustration de la reparamétrisation pixiligne.

La figure 5.9 donne quelques exemples de tangentes en fonction de la taille du noyau dérivateur utilisé. Ce premier exemple utilise un pas de discrétisation $h = \frac{1}{10}$. On peut déjà remarquer que l'estimation de la tangente s'améliore quand la taille du noyau dérivateur augmente.

La figure 5.10, quant à elle, donne l'erreur commise par l'estimateur de dérivées discret sur l'angle de la tangente en fonction du pas de discrétisation et de la taille du noyau dérivateur. Pour être plus précis, ce schéma représente l'erreur maximale. Par conséquent, s'il y avait un quelconque problème de convergence au niveau des tangentes verticales ou horizontales, il serait reflété sur cette figure. Or, il semble que ce ne soit pas le cas. En effet, on observe un comportement similaire à celui obtenu pour le cas des fonctions réelles de la section 3.6 : l'estimation des dérivées est globalement bonne (quelle que soit le pas de discrétisation et la taille du noyau de dérivation) et, qui plus est, il existe une zone de convergence optimale dont l'allure est comparable à celle prédite par le théorème de convergence 3.4.1.

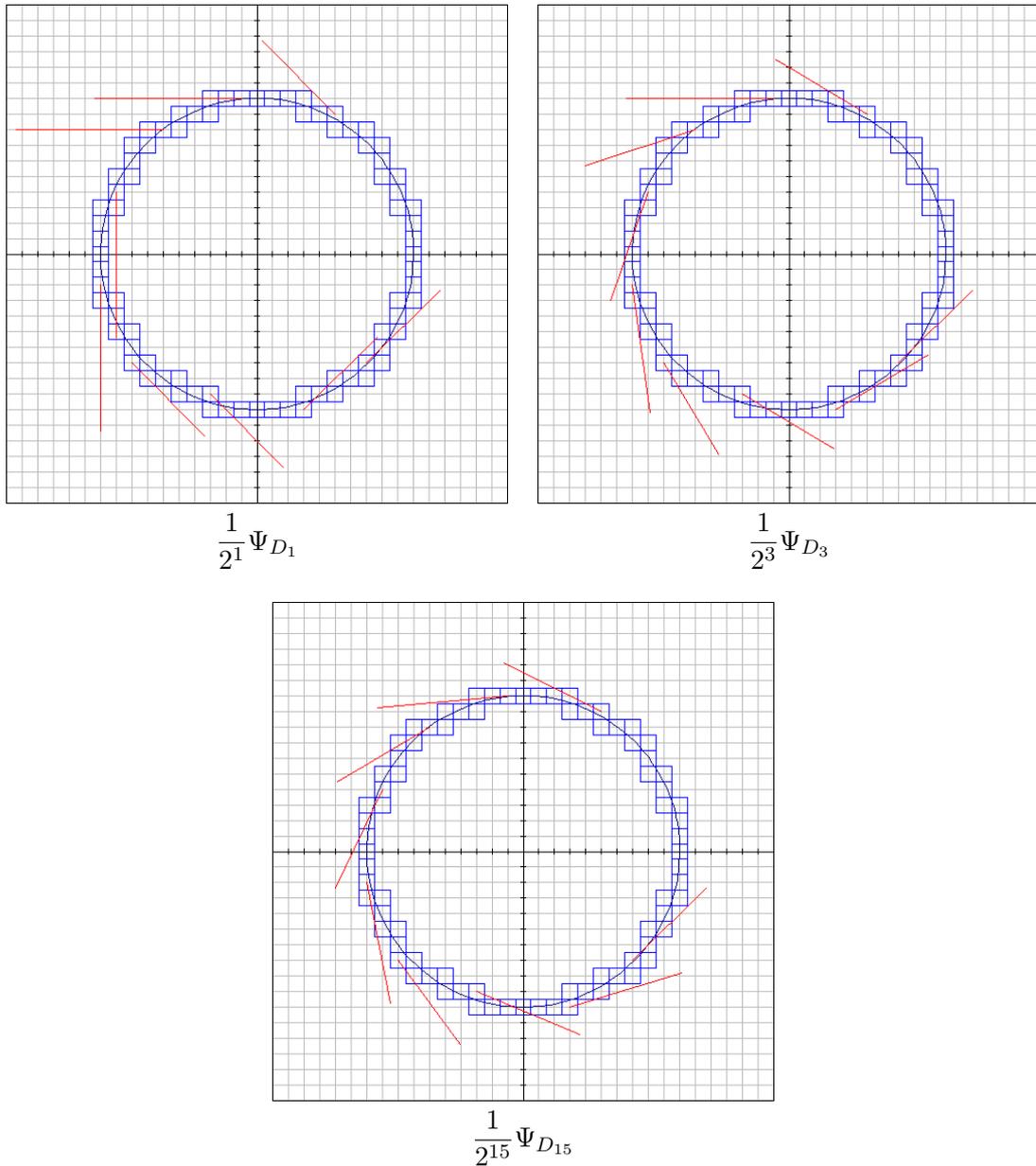


Fig. 5.9: Estimation de tangentes à un cercle discret avec plusieurs tailles de noyaux.

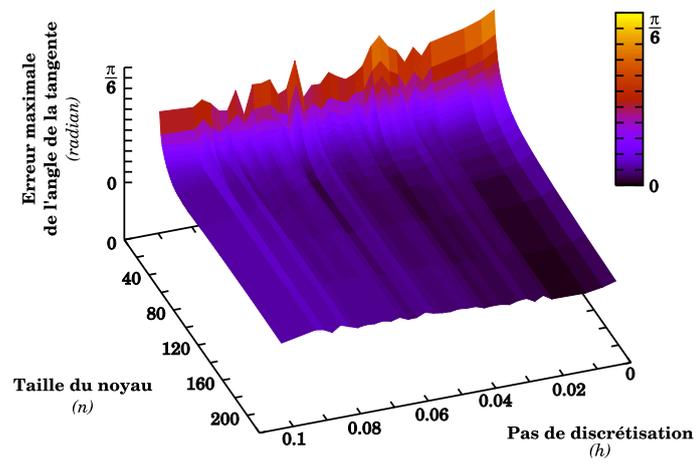


Fig. 5.10: Vitesse de convergence de l'estimateur pour une courbe paramétrée.

5.7.2 Comparaison avec la géométrie discrète

L'exemple que nous allons maintenant traiter a pour but de comparer notre estimateur de dérivées pour le calcul de tangentes avec les méthodes issues de la géométrie discrète. Pour cela, nous allons reprendre un exemple utilisé dans [4]. Commençons avec la définition de la fonction paramétrée initiale :

$$\phi : [0, 4[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4}t \end{pmatrix} & \text{si } t \in [0, 1[\\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right) + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right) + \frac{3}{4} \end{pmatrix} & \text{si } t \in [1, 2[\\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(3-t) \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } t \in [2, 3[\\ \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}(t-3) + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}(t-3) + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} & \text{si } t \in [3, 4[\end{cases} \quad (5.36)$$

Cette fonction, appelée *csquare* dans [4], est représentée par la courbe de la figure 5.11.

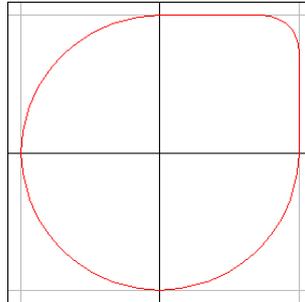


Fig. 5.11: *csquare*, la courbe initiale.

La figure 5.12 donne un aperçu d'une discrétisation de la fonction initiale et de l'estimation des tangentes.

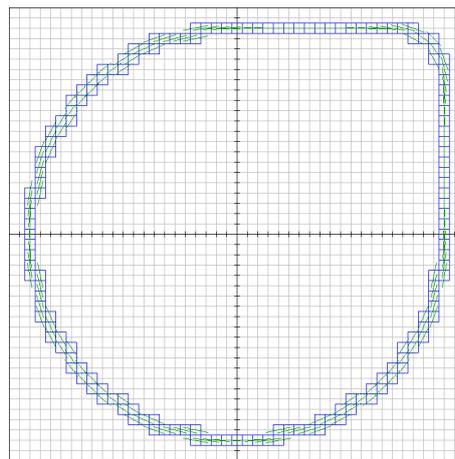


Fig. 5.12: Les tangentes estimées avec $h = \frac{1}{20}$ comme pas de discrétisation et un noyau dérivateur de taille $n = 41$.

Nous allons maintenant comparer l'angle des tangentes estimées avec l'angle théorique attendu (que l'on peut calculer grâce à l'expression analytique de la fonction ϕ). Mais avant de poursuivre, définissons une notion qui nous sera utile : l'angle polaire.

Définition 5.7.2 (Angle polaire)

Soit (O, \vec{u}, \vec{v}) le repère de \mathbb{R}^2 et soit $P \in \mathbb{R}^2$ un point d'une courbe paramétrée. On appelle *angle polaire* l'angle α défini de la manière suivante :

$$\alpha = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OP} \right) \quad (5.37)$$

Une illustration de l'angle polaire est donnée à la figure 5.13.

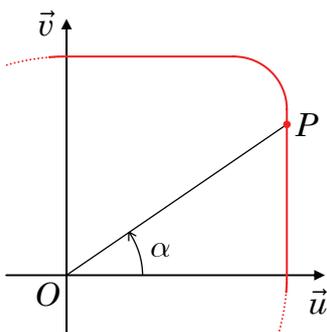


Fig. 5.13: Angle polaire en un point d'une courbe paramétrée.

De la même manière qu'avec une courbe paramétrée continue, on peut associer un angle polaire aux pixels d'une courbe discrète. Ainsi, nous pouvons comparer la différence entre l'orientation de la tangente en un point d'une courbe paramétrée réelle et l'orientation de son homologue dans la discrétisation en fonction de l'angle polaire (identique dans les deux types de courbes). C'est ce qui a été fait pour les résultats des figures 5.14 et 5.15. Ces résultats confirment que notre estimateur de tangentes est globalement meilleur lorsqu'on augmente la taille du noyau de dérivation. Toutefois, il apparait aussi qu'avec un noyau plus grand, l'estimation est localement moins bonne au niveau des changements de courbure de la courbe (par exemple, pour les angles polaires 0.65 et 0.9).

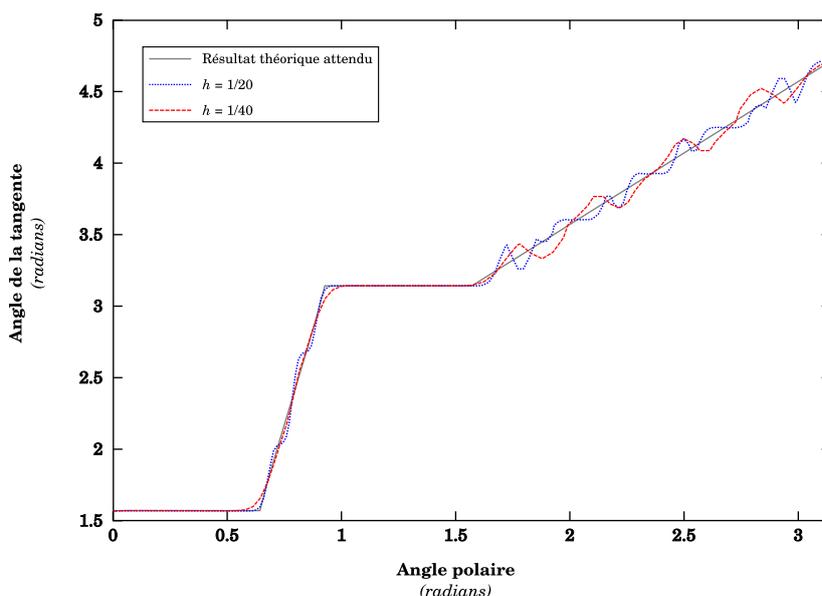


Fig. 5.14: Angle de la tangente en fonction de l'angle polaire pour un noyau dérivateur de taille $n = 11$

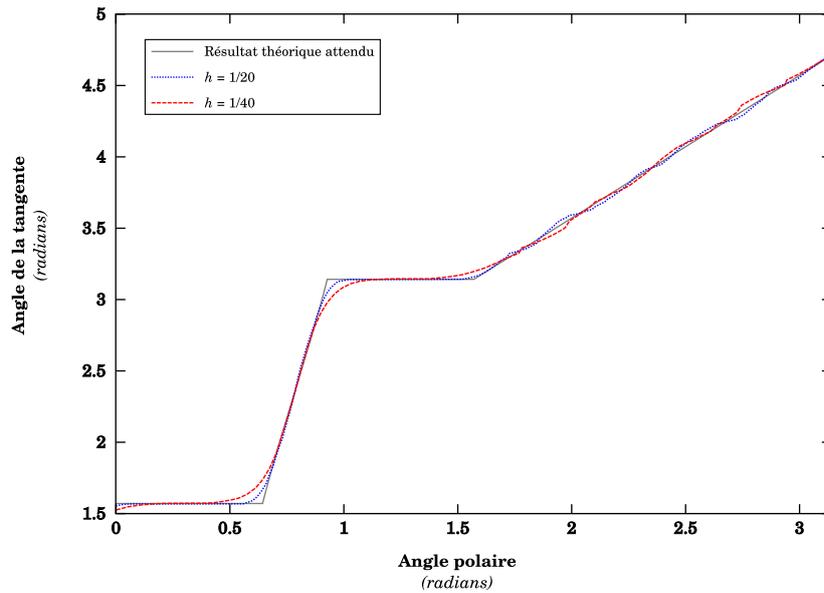


Fig. 5.15: Angle de la tangente en fonction de l'angle polaire pour un noyau dérivateur de taille $n = 41$

La figure 5.16 (reprise de [4]) présente les mêmes résultats mais pour les quatre estimateurs de tangentes issus de la géométrie discrète que nous avons présentés dans la section 5.4. On observe que notre estimateur de tangentes est au moins aussi bon que ceux de la géométrie discrète. Il convient néanmoins de noter que ces résultats sont justes pour cet exemple particulier. De par son effet « lissant », notre approche pourrait être moins bonne dans les zones de forte courbure.

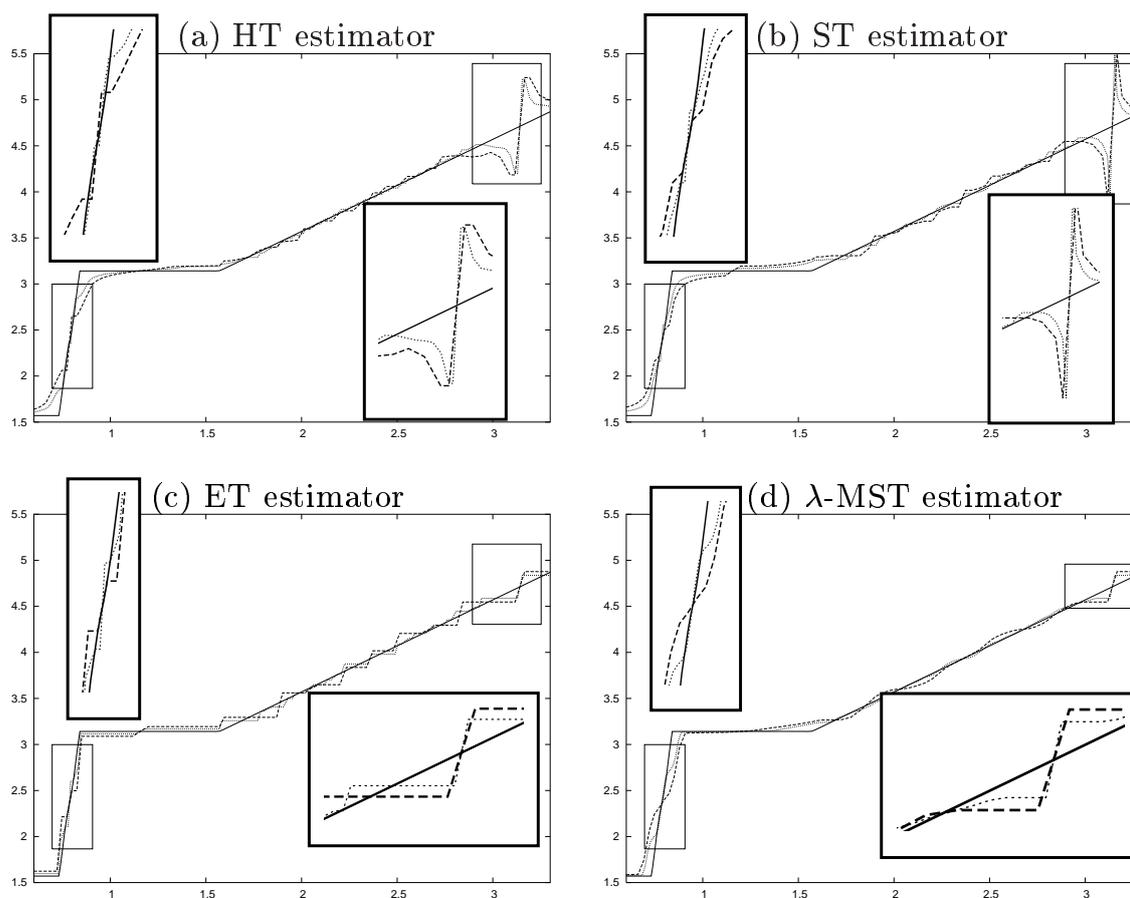


Fig. 5.16: Direction estimée des tangentes en fonction de l'angle polaire par les méthodes de la géométrie discrète. Les lignes pleines représentent le résultat théorique attendu, les lignes en pointillés larges le résultat pour un pas de discrétisation $h = \frac{1}{20}$ et les pointillés fins pour $h = \frac{1}{40}$ (figure extraite de [4]).

5.8 Extensions

5.8.1 Dérivées d'ordre supérieur

De la même manière que dans le cas des fonctions réelles, on peut s'intéresser aux dérivées d'ordre supérieur pour les courbes paramétrées. Nous ne nous étendons pas plus sur le sujet étant donné qu'il s'agit exactement du même procédé que pour les fonctions réelles, comme nous l'avons vu à la section 3.5. De plus, comme nous ne possédons pas encore de démonstration satisfaisante pour la convergence de la dérivée première, nous ne pourrions pas non plus montrer la convergence pour les dérivées d'ordre supérieur.

5.8.2 Rayon de courbure

Contrairement à certains estimateurs de tangentes issus de la géométrie discrète, notre estimateur de tangentes ne respecte pas obligatoirement les éventuelles propriétés de convexité des courbes paramétrées. La figure 5.17 donne un exemple où la tangente estimée entre à l'intérieur de la courbe alors que celle-ci est convexe. Cela provient du fait que le noyau dérivateur a un effet moyennant qui lisse les parties les plus « obtuses » de la courbe. Ce phénomène de lissage est d'autant plus important que le noyau de dérivation est grand.

L'idée de partie obtuse d'une courbe est formalisée grâce au rayon de courbure.

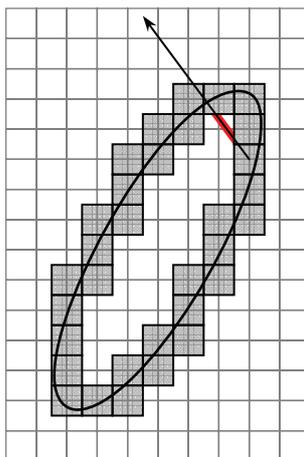


Fig. 5.17: Une tangente incorrecte sur une courbe convexe.

Définition 5.8.1 (Rayon de courbure)

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction paramétrée de composantes ϕ_x et ϕ_y . On appelle *rayon de courbure* au point de paramètre t la quantité $\kappa(t)$ définie par :

$$\kappa(t) = \frac{(\phi_x'^2(t) + \phi_y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}{\phi_y''(t)\phi_x'(t) - \phi_x''(t)\phi_y'(t)} \quad (5.38)$$

Le rayon de courbure en un point de paramètre t correspond à l'inverse du rayon du cercle osculateur en ce même point. En un point d'une courbe paramétrée, il est possible de placer plusieurs cercles tangents. Si le rayon de ce cercle est trop grand, le cercle passe à « l'extérieur » de la courbe. Inversement, avec un rayon trop faible, le cercle est à « l'intérieur » de la courbe. Intuitivement, le cercle osculateur est le cercle limite entre les cercles intérieurs et les cercles extérieurs. La figure 5.18 illustre la notion de cercle osculateur.

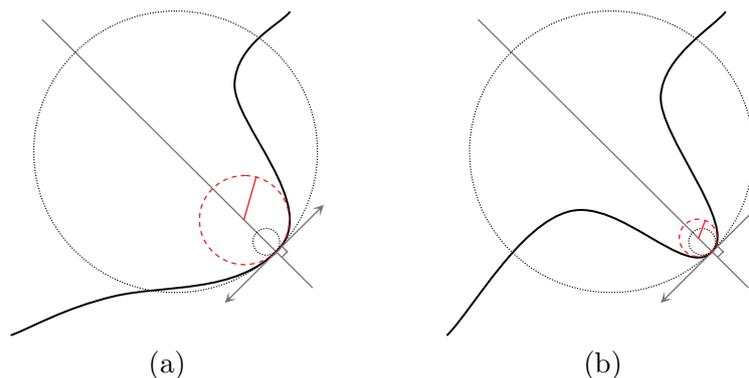


Fig. 5.18: Le cercle osculateur (en rouge) en un point est le cercle limite entre les cercles tangents « intérieurs » et les cercles tangents « extérieurs ». Ici, le rayon de courbure dans le cas (b) est plus grand que le rayon de courbure du cas (a).

Ainsi, la qualité de notre estimateur de dérivée est dégradée au niveau des parties de la fonction ayant une forte courbure. Cet état de fait pourrait être amélioré si l'on prenait en compte la courbure locale pour définir la taille du noyau dérivateur. Il faudrait en effet que le noyau soit plus petit dans les zones de forte courbure et plus grand ailleurs. Cependant, le théorème de convergence impose une taille pour le noyau dérivateur afin d'obtenir de

bons résultats. En définitive, il faudrait donc trouver un compromis entre la taille optimale théorique du noyau et la prise en compte de la courbure locale.

Si l'on observe l'équation 5.38 donnant l'expression de la courbure, on observe que celle-ci est définie à partir des dérivées premières et secondes de la fonction paramétrée. Nous sommes donc face à un problème puisque l'estimateur de dérivées discrètes possède une certaine faiblesse pour les points de forte courbure. On peut néanmoins imaginer que même si l'estimation de la courbure (calculée à partir de l'équation 5.38 et de l'estimateur de dérivée) n'est pas parfaite elle est suffisante pour améliorer l'estimation initiale de la dérivée. Partant de cette première amélioration, on pourrait itérer le principe c'est à dire calculer à nouveau la courbure puis altérer une fois encore la taille du noyau et ainsi de suite.

Pour l'instant cette méthode reste une idée à approfondir. En effet, aucune expérimentation réelle n'a été menée.

Chapitre 6

Un environnement de test

Afin de tester et d'expérimenter l'estimateur de dérivées, il a été nécessaire de programmer une librairie. Cette librairie se devait d'être facile d'emploi sans pour autant sacrifier les performances. Les contraintes des problèmes posés devaient aussi être prises en compte.

6.1 Grands entiers

La contrainte la plus forte que doit respecter une librairie mettant en œuvre les principes de l'estimateur de dérivées réside dans l'utilisation de grands entiers. Comme nous l'avons vu précédemment, le noyau dérivateur est défini à partir des coefficients binomiaux. Or ces coefficients ont la propriété de croître fortement. À titre d'exemple, $\binom{40}{10} = 113380261800$. Par conséquent, même pour des noyaux dérivateurs de petite taille, les nombres utilisés sont très grands (tout du moins par rapport à la précision native d'un ordinateur standard). Il est donc impératif d'utiliser une librairie de gestion des entiers de taille arbitraire. En l'occurrence, nous avons choisi d'utiliser la librairie GMP¹ (GNU Multiple Precision). Toutefois, l'utilisation d'une telle librairie est relativement coûteuse en temps de calcul. Il est donc nécessaire de pouvoir utiliser des types de données natifs. De plus, il est judicieux de pouvoir laisser le choix à l'utilisateur final de la librairie en précision arbitraire qu'il souhaite utiliser. C'est pourquoi, la librairie devait être générique. Mon choix s'est donc tout naturellement porté sur le C++ et les mécanismes de *templates* ([16]).

6.2 Calcul pratique des produits de convolutions

Étant donnée une fonction F définie sur $\{a_1, \dots, a_2\}$ et un noyau de convolution K défini sur $\{b_1, \dots, b_2\}$, le produit de convolution $F * K$ n'est clairement défini que sur $\{a_1 + b_2, \dots, a_2 - b_1\}$. Cependant, il est parfois commode de pouvoir calculer le produit de convolution sur l'intégralité du domaine $\{a_1, \dots, a_2\}$ de la fonction F . Cela peut être réalisé en étendant artificiellement le domaine de définition de la fonction F pour construire une fonction \bar{F} . Les deux extensions de fonction suivantes ont d'ailleurs un domaine de définition virtuellement non borné.

Extension par valeur

L'extension par valeur consiste à fixer des valeurs pour la fonction F en dehors de son domaine de définition. Soient deux valeurs fixées $f_g \in \mathbb{Z}$ et $f_d \in \mathbb{Z}$. L'extension par valeur \bar{F}

¹<http://gmplib.org>

de la fonction F est ainsi définie (pour tout $a \in \mathbb{Z}$) :

$$\overline{F}(a) = \begin{cases} F(a) & \text{si } a \in \{a_1, \dots, a_2\} \\ f_g & \text{si } a < a_1 \\ f_d & \text{si } a > a_2 \end{cases} \quad (6.1)$$

En pratique, on utilise souvent le choix $f_g = f_d = 0$.

Extension cyclique

L'extension cyclique d'une fonction F consiste à considérer que la fonction F est cyclique et que les valeurs prises par F sur $\{a_1, \dots, a_2\}$ constituent un cycle de la fonction. Ainsi, l'extension cyclique \overline{F} de F est définie par (pour tout $a \in \mathbb{Z}$) :

$$\overline{F}(a) = \begin{cases} F(a) & \text{si } a \in \{a_1, \dots, a_2\} \\ F(a_1 + r) & \text{si } a \notin \{a_1, \dots, a_2\} \end{cases} \quad (6.2)$$

où r est l'entier positif tel que :

$$a - a_1 \equiv r \pmod{[a_2 - a_1 + 1]} \quad (6.3)$$

La librairie développée propose des fonctionnalités visant à simplifier la mise en place des extensions de fonctions.

6.2.1 Autres fonctionnalités

Interopérabilité Il est aussi possible d'interfacer la librairie de gestion de la dérivation avec d'autres bibliothèques concernant la gestion de matrices ou la gestion d'images numériques. Il est ainsi aisé de considérer, par exemple, un vecteur colonne comme étant une fonction ou, encore, de calculer des dérivées sur une image.

Discretisation La librairie fournit aussi quelques classes générales pour la manipulation des données discrètes. Il est ainsi possible de calculer la discrétisation de différents types de fonctions (fonctions réelles, courbes paramétrées, ...).

Gestion des erreurs L'exécution de l'ensemble des éléments de la librairie est sécurisé grâce à un mécanisme de gestion des erreurs reposant sur une hiérarchie d'exceptions du C++.

Documentation La totalité du code de la librairie a été commentée de manière détaillée en utilisant le format Doxygen. Il est ainsi possible d'extraire une documentation complète du code source.

Chapitre 7

Problèmes connexes

Nous avons défini une méthode performante pour estimer des dérivées de fonctions discrètes dans la mesure où cette méthode est convergente, résistante au bruit et calculable en nombres entiers. Dès lors, nous pouvons nous intéresser à des problèmes connexes tels que le calcul de primitives ou la résolution d'équations différentielles. En somme, l'objectif final serait de construire une théorie de l'analyse dans \mathbb{Z} adaptée à notre opérateur de dérivation. Toutefois, comme nous allons le voir, les problèmes posés par cette construction restent ouverts.

7.1 Calcul de primitives

7.1.1 Présentation du problème

Étant donnée une fonction discrète $G : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$, on appelle la fonction F primitive de G si elle vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} F = G \quad (7.1)$$

Le problème du calcul de primitive consiste donc à déterminer la fonction F . Par la suite, on omettra volontairement le facteur 2^n dans la mesure où cela ne change pas le problème. On peut en effet considérer que ce facteur est déjà « inclus » dans la fonction F .

7.1.2 Une première approche

En utilisant la définition de l'opérateur de dérivation, le problème du calcul de primitive consiste à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_n * F(1) = 2^n G(1) \\ \vdots \\ D_n * F(q) = 2^n G(q) \end{cases} \quad (7.2)$$

Puisque le calcul du produit de convolution entre D_n et F en un point a fait intervenir un ensemble de valeurs de F autour du point a , un problème de définition de $D_n * F$ apparaît au niveau des bornes de $\{1, \dots, q\}$. Il faut donc définir la fonction F en dehors du domaine $\{1, \dots, q\}$. Plusieurs solutions sont possibles pour ce problème. On peut considérer, par exemple, que la fonction F vaut 0 partout en dehors de $\{1, \dots, q\}$ (on dit alors que la fonction F est à support borné). On peut aussi considérer que la fonction F se répète de

manière cyclique en dehors de $\{1, \dots, q\}$ (dans ce cas, on dit que F est cyclique). Nous verrons que ces considérations changent fondamentalement le problème de la recherche d'une primitive.

Notation 7.1.1

Pour simplifier les notations, on peut considérer la fonction discrète $F : \{1, \dots, q\} \rightarrow \mathbb{Z}$ comme étant la suite numérique $(F_i)_{i \in \{1, \dots, q\}}$. Ainsi, on notera F_a au lieu de $F(a)$.

7.1.3 Cas des fonctions à support borné

Considérons dans un premier temps que la fonction F est à support borné, c'est à dire que $F_a = 0$ pour tout $a \notin \{1, \dots, q\}$. Soit M_F la matrice colonne associée à la fonction F définie de la manière suivante :

$$M_F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_q \end{bmatrix}$$

Si $(H_i)_{i \in \{a, \dots, 0, \dots, b\}}$ est un noyau de convolution à support fini alors le produit de convolution peut être calculé avec la multiplication matricielle suivante :

$$M_H M_F = \begin{bmatrix} H_0 & H_{-1} & \dots & H_a & 0 & \dots & 0 \\ H_1 & H_0 & H_{-1} & \dots & H_a & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ H_b & & & H_0 & & & H_a \\ 0 & H_b & & H_0 & & & H_a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & H_b & & & H_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 0 & H_b & & H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_q \end{bmatrix}$$

Reprenons alors la définition de l'estimateur de dérivées. En utilisant les propriétés des produits de convolution, le problème de la primitive peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi_{D_n} F &= G \\ \Leftrightarrow \Psi_{H_n * \delta} F &= G \\ \Leftrightarrow \Psi_{H_n} (\Psi_{\delta} F) &= G \end{aligned}$$

En notant M_{δ} la matrice associée au produit de convolution avec le noyau δ et M_{H_n} la matrice associée au produit de convolution avec H_n , la dernière équivalence donne la relation

matricielle suivante pour le problème de la primitive :

$$M_{H_n} M_\delta M_F = M_G$$

Or, on peut montrer par récurrence que le déterminant de la matrice M_δ est toujours égal à 1. Nous sommes même en mesure de donner la forme générale de l'inverse de la matrice M_δ :

$$M_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_\delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

De la même manière, la matrice M_{H_n} est aussi inversible (notons bien que cela n'est valable que si l'on suppose un support borné pour la fonction F).

Ainsi, on obtient la caractérisation de la primitive F de la manière suivante :

$$\begin{aligned} M_{H_n} M_\delta M_F &= M_G \\ \Leftrightarrow M_{H_n}^{-1} M_{H_n} M_\delta M_F &= M_{H_n}^{-1} M_G \\ \Leftrightarrow M_\delta M_F &= M_{H_n}^{-1} M_G \\ \Leftrightarrow M_\delta^{-1} M_\delta M_F &= M_\delta^{-1} M_{H_n}^{-1} M_G \\ \Leftrightarrow M_F &= M_\delta^{-1} M_{H_n}^{-1} M_G \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque l'on considère que la fonction F est à support borné, le problème du calcul de la primitive possède une unique solution. Comme le montre l'exemple suivant, les résultats ainsi obtenus ne sont pas très « bons » (dans le sens où l'on pourrait s'attendre à ce que la primitive estimée ait l'allure de la primitive continue au sens usuel du terme).

Un simple exemple Essayons de calculer une primitive F de la fonction G définie de la manière suivante :

$$G_a = a \quad \forall a \in \{1, \dots, q\} \quad (7.3)$$

Encore une fois, nous oublions le facteur 2^n puisque le problème reste équivalent. En se basant sur un noyau dérivateur de taille $n = 3$, le graphe de la primitive F a l'allure illustrée à la figure 7.1. On constate sur cette figure que l'on trouve une primitive ayant une allure convenable (car le résultat attendu doit avoir l'allure d'une parabole).

En revanche, si l'on augmente les dimensions du problème en définissant la fonction G sur le domaine $\{1, \dots, 100\}$ et en se basant sur le noyau dérivateur D_6 , le résultat est bien moins satisfaisant, comme l'illustre la figure 7.2.

Remarque 7.1.1

Remarquons qu'en se basant sur un noyau dérivateur de taille $n = 0$ (qui correspond en

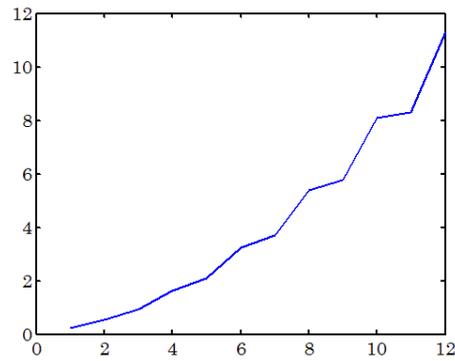


Fig. 7.1: Calcul d'une primitive pour une fonction à support borné.

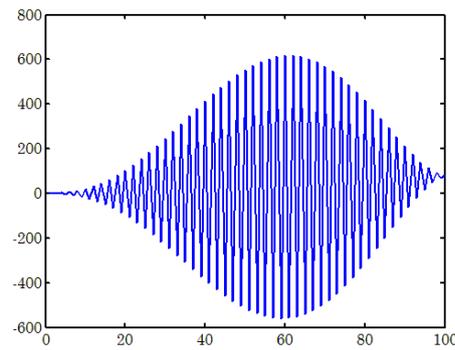


Fig. 7.2: Calcul d'une primitive pour une fonction à support borné avec des données de plus grande taille.

fait au noyau des différences finies arrières, δ), l'expression formelle de la primitive F est la suivante :

$$F_a = \sum_{i=1}^a G_i \quad (7.4)$$

Si l'on considère que la fonction initiale G est la discrétisation d'une fonction continue ϕ , alors l'estimation donnée par l'équation 7.4 converge vers l'intégrale de la fonction ϕ . Ce résultat provient du fait que l'équation 7.4 est une somme de Riemann.

7.1.4 Cas des fonctions cycliques

Considérons maintenant le cas des fonctions cycliques. En utilisant les notations matricielles, le produit de convolution de la fonction $(F_i)_{i \in \{1, \dots, q\}}$ avec le noyau $(H_i)_{i \in \{a, \dots, 0, \dots, b\}}$ s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$M_H M_F = \begin{bmatrix} H_0 & H_{-1} & \dots & H_a & 0 & \dots & 0 & H_b & \dots & H_1 \\ H_1 & H_0 & H_{-1} & \dots & H_a & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\ H_b & & & H_0 & \dots & H_a & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ H_a & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ H_{-1} & H_a & 0 & \dots & 0 & H_b & \dots & H_0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ H_b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ H_a \\ \vdots \\ F_q \end{bmatrix}$$

De la même manière que pour le cas des fonctions à support borné, le problème de la primitive consiste à trouver une matrice M_F telle que :

$$M_{H_n} M_\delta M_F = M_G \tag{7.5}$$

Cependant, dans le cas des fonctions cycliques, la matrice M_{H_n} n'est pas inversible : elle est sous déterminée. Il existe donc une infinité de matrices colonnes M_F vérifiant la relation 7.5. Par conséquent, la solution du problème n'est pas évidente et, pour aller plus loin, la formulation même du problème devient ambiguë. En effet, quels critères doit-on prendre en considération pour choisir une solution particulière parmi l'ensemble des possibilités ?

Dimitri Daucher¹ a proposé une solution pour résoudre le problème de la primitive dans le cas de fonctions cycliques. Sa méthode, algébrique, repose sur une étude approfondie du système linéaire $M_{D_n} M_F = M_G$. Il en déduit qu'une solution de ce système est la somme d'une solution particulière M_{F_S} et d'un élément M_{F_N} du noyau (c'est à dire un élément M_{F_N} solution du système homogène $M_{D_n} M_{F_N} = 0$). À la manière de la figure 7.2, les solutions du noyau sont des fonctions fortement oscillantes. L'idée consiste à considérer qu'une bonne solution au problème de la primitive est une fonction dont les oscillations ne sont pas trop importantes. On définit alors une fonction quantifiant les oscillations. Cette fonction doit ensuite être minimisée. Cela est réalisé par la résolution d'un autre système linéaire (grâce à une méthode de gradient conjugué). Avec cette méthode, il est possible d'obtenir des primitives relativement régulières (sans oscillations). Cependant, l'allure des fonctions trouvées n'est pas obligatoirement en rapport avec le résultat attendu (à savoir, la primitive calculée dans le domaine continu).

Dans la mesure où l'on ne sait pas dire avec précision le résultat que l'on attend, le problème est, pour l'instant, mal posé. En effet, rechercher une primitive discrète dont l'allure global est celle de son équivalent dans le domaine continu, n'est pas obligatoirement l'objectif à atteindre. Par conséquent, le problème de la primitive discrète reste ouvert.

¹Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris.

7.2 Résolution d'équations différentielles

Se basant sur la définition de notre opérateur de dérivation, un autre problème intéressant est celui de la résolution d'équations différentielles. Par exemple, on peut vouloir chercher une fonction discrète F telle que :

$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} F = F \quad (7.6)$$

ou encore, pour des ordres supérieurs :

$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n^2} F + \frac{1}{2^m} \Psi_{D_m} F = F \quad (7.7)$$

Les recherches effectuées jusqu'alors pour ce nouveau problème sont encore moins avancées que celles sur le calcul de primitives. Pour l'instant, seuls quelques résultats très simples et peu intéressants ont été obtenus. Je ne rentrerai donc pas dans les détails.

Notons simplement que l'objectif à long terme pourrait être de transcrire toutes les notions de l'analyse classique du domaine continu au domaine discret, le tout adapté à notre opérateur de dérivation discret.

Conclusion

Nous avons mis en place une nouvelle méthode efficace pour estimer des dérivées de fonctions discrètes éventuellement bruitées. Outre une vitesse de convergence honorable, cette méthode présente d'autres avantages. En effet, étant donné un pas de discrétisation et une modélisation simple d'un éventuel bruit, nous sommes en mesure de déterminer automatiquement la taille du noyau dérivateur à utiliser. Ainsi, l'utilisateur n'a pas besoin de fixer trop de paramètres arbitrairement. De plus, les dérivées d'ordres supérieurs peuvent être calculées donnant ainsi des perspectives à d'éventuels développements futurs tels que l'estimation de courbure. Enfin, un des atouts majeurs de notre estimateur de dérivées est de pouvoir être implémenté en nombres entiers.

Bien que la convergence de la méthode ne soit pas complètement démontrée, les expérimentations laissent penser que notre approche est aussi valable dans le cas des courbes paramétrées. Quoiqu'il en soit, en introduisant la nouvelle notion d'abscisse pixiligne, le problème de correspondance entre la paramétrisation d'une fonction continue et la numérotation des pixels de la courbe discrète lui correspondant a été résolu.

La définition d'un estimateur performant de dérivées dans le domaine discret pose les bases pour de futurs travaux. En effet, partant de cette nouvelle notion de dérivée, des problèmes tels que le calcul de primitives et la résolution d'équations différentielles peuvent être abordés dans les espaces discrets. Bien qu'embryonnaires à l'heure actuelle, ces extensions pourraient se révéler porteuses dans la mesure où elles seraient parfaitement adaptées aux outils informatiques modernes.

Enfin, et sur un plan plus personnel, la réalisation de ce stage de master recherche deuxième année a été très bénéfique. En effet, j'ai pu découvrir de manière plus approfondie certains aspects de la recherche : travail scientifique, rédaction d'article, collaborations avec d'autres chercheurs, présentations d'exposés en conférence.

Table des figures

1.1	LAIC, le laboratoire géométrique.	6
2.1	Le triangle de Pascal	10
3.1	Arrondi arithmétique	15
3.2	Illustration d'une discrétisation.	16
3.3	Interprétation de la dérivée comme pente de la tangente.	17
3.4	Principe du changement d'échelle dans scale-space.	19
3.5	Relation entre le noyau H_n et le triangle de Pascal.	21
3.6	Convergence théorique.	33
3.7	Estimation avec D_0	34
3.8	Estimation avec D_1	34
3.9	Estimation avec D_{31}	34
3.10	Estimation avec D_{32}	35
3.11	Estimation avec D_{1000}	35
3.12	Erreur cumulée et zone de convergence optimale.	35
3.13	Comparaison de l'erreur maximale pour les noyaux pairs et impairs.	36
3.14	Temps de calcul requis pour l'estimation de dérivées discrètes.	36
3.15	Taille des entiers utilisés lors de l'estimation de dérivées discrètes.	37
3.16	Dérivées d'ordre supérieur sous l'hypothèse $\alpha = 0.7$	38
3.17	Dérivées d'ordre supérieur sous l'hypothèse $\alpha = 1$	38
3.18	Dérivées d'ordre supérieur en utilisant des noyaux calculables nativement par une machine 32 bits.	39
4.1	Calcul de la dérivée partielle par rapport à la première variable.	43
4.2	Calcul de la dérivée partielle par rapport à la première variable en utilisant un noyau rectangulaire	44
4.3	Dérivée de f au point u dans la direction du vecteur d	46
4.4	Image test non bruitée.	47
4.5	Image bruitée avec un bruit blanc gaussien additif.	48
4.6	Amplitude du gradient.	48
4.7	Ajustement d'un contour parabolique.	49
4.8	Qualité de l'ajustement du contour parabolique.	50
5.1	Représentation courante de l'espace discret \mathbb{Z}^2	51
5.2	Deux types de voisinage dans \mathbb{Z}^2	52
5.3	Exemples de chemins k -connexes.	52
5.4	Exemples de droites arithmétiques.	53
5.5	Interprétation de la dérivée comme pente de la tangente.	55
5.6	Vitesse de la paramétrisation initiale.	62

5.7	Illustration de la reparamétrisation pixiligne.	63
5.8	Angle de la tangente en t_0	67
5.9	Estimation de tangentes à un cercle discret avec plusieurs tailles de noyaux.	68
5.10	Vitesse de convergence de l'estimateur pour une courbe paramétrée.	69
5.11	<i>csquare</i> , la courbe initiale.	70
5.12	Les tangentes estimées avec $h = \frac{1}{20}$ comme pas de discrétisation et un noyau dérivateur de taille $n = 41$	70
5.13	Angle polaire en un point d'une courbe paramétrée.	71
5.14	Angle de la tangente en fonction de l'angle polaire pour un noyau dérivateur de taille $n = 11$	71
5.15	Angle de la tangente en fonction de l'angle polaire pour un noyau dérivateur de taille $n = 41$	72
5.16	Directions estimées de tangentes par les méthodes de la géométrie discrète.	73
5.17	Une tangente incorrecte sur une courbe convexe.	74
5.18	Cercle oscultateur.	74
7.1	Calcul d'une primitive pour une fonction à support borné.	81
7.2	Calcul d'une primitive pour une fonction à support borné avec des données de plus grande taille.	81

Bibliographie

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling%27s_approximation. Wikipedia, 2007.
- [2] http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9riv%C3%A9_directionnelle. Wikipedia, 2007.
- [3] <http://www.diycalculator.com/popup-m-round.shtml>. DIY Calculator, 2007.
- [4] Jacques-Olivier Lachaud Anne Vialard François de Vieilleville. Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. In *DGCI*, pages 240–251, 2005.
- [5] Christophe Florio Damien Jamet. Géométrie discrète, droites et plans. Technical report, LIRMM, octobre 2006.
- [6] Henk J. A. M. Heijmans Rein van den Boomgaard. Algebraic framework for linear and morphological scale-spaces. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13 :269–301, mars 2002.
- [7] S.H. Chen. *Finite Difference Method*. High-Field Physics and Ultrafast Technology Laboratory, Taipei, Taïwan, 2006.
- [8] R.A. DeVore and G.G. Lorentz. *Constructive Approximation*. Springer, Berlin, 1993.
- [9] Michael S. Floater. On the convergence of derivatives of bernstein approximation. *J. Approx. Theory*, 134(1) :130–135, 2005.
- [10] J.-L. LeVeque. *Finite Difference Methods for Differential Equations*. 1998.
- [11] Tony Lindeberg. Scale-space theory : A basic tool for analysing structures at different scales. *Journal of Applied Statistics*, 1994.
- [12] Tony Lindeberg. Principle for automatic scale selection. Technical report, Computational Vision and Active Perception Laboratory (CVAP), Royal Institute of Technology, Stockholm, Suède, août 1998.
- [13] G. G. Lorentz. Zur theorie der polynome von s. bernstein. *Matematicheskij Sbornik*, pages 543–556, 1937.
- [14] Rémy Malgouyres. *Algorithmes pour la synthèse d'images et l'animation 3D*, chapitre 5, page 60. Dunod, 2002.
- [15] Jean-Pierre Reveillès. *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.
- [16] Bjarne Stroustrup. *La langage C++*. Campuspress, mai 1999.